Grenzschichtströmung

Um eine horizontale Platte der Länge $l = 4\,\mathrm{m}$ strömt Pflanzenöl. Die Platte ist in Strömungsrichtung ausgerichtet. Die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung beträgt $U_\infty = 0{,}08\,\mathrm{m/s}$, die Temperatur $\vartheta_\infty = 25\,^\circ\mathrm{C}$. Die Platte wird auf der konstanten Temperatur $\vartheta_P = 37{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ gehalten.

Stoffwerte des Öls:

$$\lambda = 0{,}336\,\mathrm{W/mK}, \quad c_p = 2{,}1\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad \nu = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad \rho = 800\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Für den Wärmeübergang von der Wand an das Fluid in einer laminaren Grenzschichtströmung entlang einer in Anströmrichtung ausgerichteten Platte gilt:

$$Nu_x = 0{,}339\,Pr^{1/3}\sqrt{Re_x}, \qquad Re_x < 5 \cdot 10^5.$$

1) Berechnen Sie die Reynolds-Zahl am Ende der Platte und geben Sie an, ob die Strömung dort laminar oder turbulent ist.
Lösung:

$$Re = 1600, \quad \text{laminar}$$

2) Bestimmen Sie die lokale Nußelt-Zahl am Ende der Platte.
Lösung:

$$Pr = 1000, \quad Nu_x(l) = 135{,}6.$$

3) Wie groß ist die mittlere Wärmestromdichte?
Lösung:

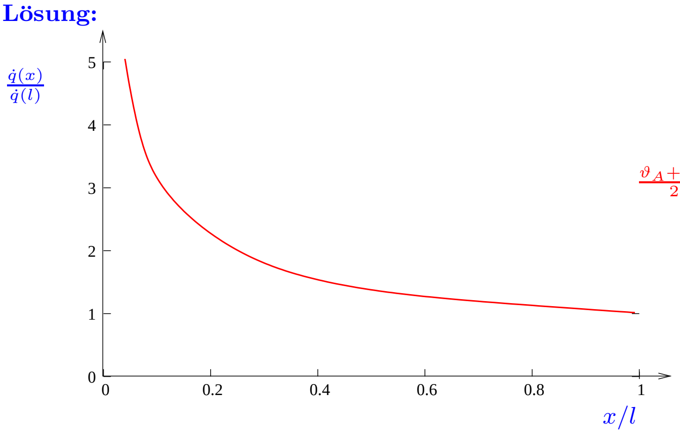
$$\dot{q}_m = Nu_P \frac{\lambda \Delta T}{l} = 2\,Nu_x(l)\frac{\lambda \Delta T}{l} = 284{,}76\,\mathrm{W/m^2}.$$

4) Berechnen Sie das Verhältnis der Wärmestromdichte $\dot{q}(x)$ an der Stelle x und der Wärmestromdichte $\dot{q}(l)$ am hinteren Plattenende als Funktion des des Abstandes x von der Vorderkante der Platte.
Lösung:

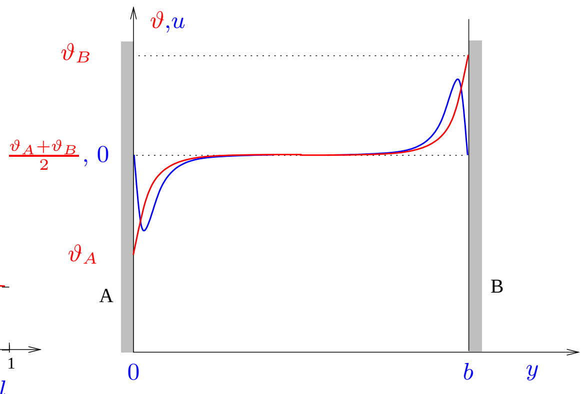
$$\dot{q}(x) = Nu_x \frac{\lambda \Delta T}{x} = c(Pr)\sqrt{Re_x}\frac{\lambda \Delta T}{x} = c(Pr)\sqrt{Re_l}\frac{\lambda \Delta T}{l}\sqrt{\frac{l}{x}} = \sqrt{\frac{l}{x}}\dot{q}(l)$$

5) Skizzieren Sie den Verlauf der lokalen Wärmestromdichte entlang der Platte.

Lösung:



5) Verlauf der Wärmestromdichte entlang der Wand



7) Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil in halber Höhe des Hohlraums

6) Gegeben sei eine turbulente Grenzschichtströmung. τ_w bzw. $\dot{q}_w$ seien die Wandschubspannung bzw. die Wärmestromdichte an einer gewissen Stelle x. U_∞ bzw. T_∞ seien die Geschwindigkeit bzw. die Temperatur der ungestörten Strömung.

Wie lautet das Temperaturprofil gemäß dem logarithmischen Wandgesetz im Überlappungsbereich zwischen der viskosen Unterschicht und der Hauptschicht der Grenzschicht?
Lösung:

$$T_w - T = \frac{\dot{q}_w}{c_p \rho u_\tau} \left(D_1 \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + D_2 \right)$$

mit $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$.

Natürliche Konvektion

Ein Hohlraum, der Luft enthält, besteht aus gegenüberliegenden vertikalen Platten A und B, die auf den einheitlichen Temperaturen $\vartheta_A = 15\,°\mathrm{C}$ bzw. $\vartheta_B = 50\,°\mathrm{C}$ gehalten werden und aus adiabaten Seiten- und Deckwänden. Die Höhe der Platten betrage $h = 60\,\mathrm{cm}$.

Stoffwerte von Luft

$$\nu = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad \lambda = 0{,}027\,\mathrm{W/mK}, \quad Pr = 0{,}71.$$

$$Nu_x = c(Pr) Gr_x^{1/4}, \quad c(0{,}71) = 0{,}37, \quad Ra_x < 10^9.$$

Man nehme an, dass sich entlang der beiden Wände A und B natürliche Konvektionsgrenzschichten ausbilden und stationäre Verhältnisse vorliegen.

7) Skizzieren das Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil in halber Höhe des Hohlraumes.

8) Bestimmen Sie die Grashof-Zahl Gr_x für $x = h$.
Lösung: Temperatur in der Mitte des Hohlraumes: $\vartheta_m = 32{,}5\,°\mathrm{C}$, $T_m = 305{,}15\,\mathrm{K}$, $\beta = 1/T_M = 3{,}272 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$.

$$Gr_h = 1{,}94 \cdot 10^8, \quad Ra_h = Pr \cdot Gr_h = 1{,}38 \cdot 10^8 \quad \Rightarrow \quad \text{laminar.}$$

9) Ist die Grenzschichtströmung laminar oder turbulent?
Lösung: $Ra = 1{,}38 \cdot 10^8 < Ra_{\mathrm{crit}}$.

10) Man bestimme die Nußelt-Zahl Nu_P der Platte.
Lösung:

$$Nu_l = 43{,}7 \quad , \quad Nu_P = 58{,}2.$$

11) Man bestimme die mittlere Wärmestromdichte.
Lösung:

$$\dot{q} = Nu_p \frac{\lambda \Delta T}{h} = 45{,}83\,\mathrm{W/m^2}.$$

12) Der Hohlraum wird in halber Höhe (bei sonst gleichen Bedingungen) durch eine horizontale Trennwand in zwei Hohlräume unterteilt. Wie ändert sich die mittlere Wärmestromdichte?
Lösung:

$$\bar{\dot{q}}_h = \frac{4}{3} c(Pr) Gr_h^{1/4} \frac{\lambda \Delta T}{h} = \frac{4}{3} c(Pr) Gr_{h/2}^{1/4} \frac{\lambda \Delta T}{h/2} \frac{Gr_h^{1/4}}{Gr_{h/2}^{1/4}} \frac{h/2}{h} = \bar{\dot{q}}_{h/2} \left(\frac{h}{h/2} \right)^{3/4} \frac{h/2}{h} = \frac{1}{2^{1/4}} \bar{\dot{q}}_{h/2}.$$

Durch Unterteilung in zwei Hohlräume nimmt die mittlere Wärmestromdichte um den Faktor $2^{1/4} = 1{,}189$ zu.

Phasenumwandlung

In einem Behälter befindet sich ein Reinstoff mit der Schmelztemperatur ϑ_m.

$$c_p = 500\,\mathrm{J/kg\,K}, \quad l = 250\,\mathrm{kJ/kg}, \quad \lambda = 25\,\mathrm{W/mK}, \quad \rho = 8000\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \vartheta_m = 1500\,°\mathrm{C}.$$

An der Wand der Gussform wird mit der (zeitlich) konstanten Wärmestromdichte $\dot{q} = 1\,\mathrm{MW/m^2}$ gekühlt.

13) Mit welcher Geschwindigkeit $\mathrm{d}x_F/\mathrm{d}t$ breitet sich die Erstarrungsfront anfänglich aus?
Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}x_F}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{q}}{\rho l} = 5 \cdot 10^{-4}\mathrm{m/s}.$$

14) Bis zu welcher Dicke x_F der erstarrten Schicht kann mit der Annahme $Sf \gg 1$ gerechnet werden? Bestimmen Sie die Lage der Erstarrungsfront, sodass $Sf = 10$ gilt.
$Sf = \frac{l}{c_p(\vartheta_m - \vartheta_w)}$.
Lösung:

$$\Delta T = \frac{l}{c_p Sf} = 50\,\mathrm{K}, \quad x_F = \frac{\lambda \Delta T}{\dot{q}_w} = 1{,}25\,\mathrm{mm}.$$

15) Wie viel Zeit ist bis dahin (Frage 14) seit Erstarrungsbeginn vergangen? (Ersatzwerte falls Frage 13 oder 14 nicht beantwortet werden konnte: $\mathrm{d}x_F/\mathrm{d}t = 0{,}4\,\mathrm{mm/s}$, $x_F = 1\,\mathrm{mm}$)
Lösung:

$$\Delta t = \frac{x_F}{\frac{\mathrm{d}x_F}{\mathrm{d}t}} = 2{,}5\,\mathrm{s}.$$