Strahlungsgesetze

1) Definieren Sie die spektrale Strahlungsintensität I_ν. Von welchen Größen ist sie abhängig?

Lösung: Die spektrale Intensität I_ν ist die Energie der Strahlung mit Frequenz ν, die in Richtung $\vec{l}$ durch eine Fläche normal auf $\vec{l}$ pro Flächeneinheit, Zeiteinheit, Raumwinkeleinheit und Frequenzeinheit tritt.

$$I_\nu=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\nu},$$

$$I_\nu=I_\nu(\vec{P},\vec{l},t).$$

Die spektrale Intensität I_ν hängt vom Raumpunkt (Ortsvektor $\vec{P}$), Richtungsvektor $\vec{l}$ und der Zeit t ab.

2) Wie erhält man aus der an einem Punkt P gegebenen Intensitätsverteilung I_ν den Gesamtstrahlungsflussvektor (Wärmestromdichtevektor) $\vec{q}$?

Lösung:

$$\dot{q}_R=\int_{4\pi}\int_0^\infty I_\nu \vec{l}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega.$$

Der Strahlungsflussvektor $\dot{q}_R$ hängt vom Raumpunkt (Ortsvektor $\vec{P}$) und der Zeit t ab.

3) In einem Raumpunkt P sei der Strahlungsflussdichtevektor $\vec{q}$ gegeben. Wie groß ist die Energiestromdichte durch eine Fläche mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ im Raumpunkt P?

Lösung:

$$\dot{q}^{(n)}=\vec{\dot{q}}_R\cdot\vec{n}.$$

4) Ein kugelförmiger schwarzer Körper S mit dem Radius $r_S=6{,}96\cdot 10^8$m habe die Temperatur $T_S=5778\,\mathrm{K}$. Wie groß ist die Strahlungsleistung $\dot{Q}_S$ dieses Körpers?

Lösung:

$$\dot{Q}_S=4\pi r_S^2\sigma T_S^4=3{,}845\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}.$$

5) Bei welcher Wellenlänge hat die Strahlung des schwarzen Körpers S ihr Intensitätsmaximun?

Lösung:

$$\lambda_{\max}=\frac{(\lambda T)_{\max}}{T}=502\,\mathrm{nm}.$$

6) Begründen Sie das Wiensche Verschiebungsgesetz mittels des Planckschen Strahlungsgesetzes.

Lösung: Wir bezeichnen mit $\xi=\nu/T$. Die Funktion

$$f(\xi)=\frac{1}{T^3}B_{\xi T}(T)$$

ist von T unabhängig. (Beachte der Index ist das Argument der Funktion). Die Funktion $f(\xi)$ hat ein Maximum bei $\xi_{\max}=5{,}88\cdot 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$. Die Planckverteilung $B_\nu(T)=T^3 f(\nu/T)$ hat daher ihr Maximum als Funktion von ν bei $\nu_{\max}/T=\xi_{\max}$. Somit gilt:

$$\nu_{\max}=\xi_{\max}T.$$

7) Geben Sie den Strahlungsflussdichtevektor in der Entfernung s vom Mittelpunkt von S an. (Herleitung).

Lösung:

$$\dot{q}_R = \frac{r_S^2}{s^2}\sigma T_s^4$$

Herleitung siehe Skriptum.

8) In der Entfernung $s = 214\,r_S$ befindet sich ein zweiter kugelförmiger schwarzer Körper E mit dem Radius $r_E = r_S/109$. Welche Strahlungsleistung absorbiert E?

Lösung:

$$\dot{q}_R = 1379\,\mathrm{W/m^2},$$

Der Wert der Solarkonstante (Mittelwert der Sonnenstrahlung auf die Erde) wurde 1982 mit $1367\,\mathrm{W/m^2}$ festgelegt.

$$\dot{Q}_{abs,E} = \pi r_E^2 \dot{q}_R = \frac{1}{4}\left(\frac{r_E}{s}\right)^2 \dot{Q}_s = 4{,}59 \cdot 10^{-10}\,\dot{Q}_s = 1{,}768 \cdot 10^{17}\,\mathrm{W}.$$

9) Welche stationäre Temperatur stellt sich auf dem Körper E ein?

Lösung:

$$\dot{Q}_{\mathrm{abs,E}} = \dot{Q}_{\mathrm{em,E}} = 4\pi r_E^2 \sigma T_E^4,$$
$$T_E = 279{,}3\,\mathrm{K}.$$

10) Wie lautet das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz für das Emissionsvermögen bzw. Absorptionsvemögen einer Oberfläche?

Lösung: Siehe Skriptum

11) Geben Sie an, wie man das Gesamtemissionsvermögen $\bar{\varepsilon}$ und das Gesamtabsorptionsvermögen $\bar{\alpha}$ einer Oberfläche der Temperatur T_1 aus dem spektralen Absorptionsvermögen α_ν erhält, wenn die Oberfläche von einem schwarzen Körper der Temperatur T_2 bestrahlt wird.

Lösung: Siehe Skriptum

Raumstation

Eine Raumstation, die sich in einer Umlaufbahn um E befindet, hat eine geschätzte Oberflächentemperatur von $\vartheta_{Ob} = 100\,^\circ\mathrm{C}$. Die Raumstation ist zylinderförmig, mit einer Länge $l = 6\,\mathrm{m}$ und einem Radius $r = 2\,\mathrm{m}$. Die Raumstation wird vom Körper S mit $\dot{q}_r = 1400\,\mathrm{W/m^2}$, unter einem Winkel $\gamma = 30^\circ$ angestrahlt. Der Körper S habe die Oberflächentemperatur $T_S = 5778\,\mathrm{K}$.

12) Bestimmen Sie das Absorptionsvermögen $\bar{\alpha}$ der Raumstation. Verwenden Sie dazu die unten stehende Formel, welche $\bar{\alpha}$ in Abhängigkeit von der Temperatur T_R der Strahlungsquelle angibt.

$$\bar{\alpha} = 0{,}1 - 0{,}002\left(\frac{T_R}{T_0}\right) + 0{,}001\left(\frac{T_R}{T_0}\right)^2 - 2\cdot 10^{-5}\left(\frac{T_R}{T_0}\right)^3, \quad T_0 = 200\,\mathrm{K}$$

Lösung:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(T_S) = 0{,}395 \quad .$$

13) Bestimmen Sie das Emissionsvermgen $\bar{\epsilon}$ der Raumstation.

Lösung:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\alpha}(T_{\mathrm{Ob}}) = 0{,}0996 \quad .$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}, \quad \left(\frac{\nu}{T}\right)_{\max} = 5{,}88\cdot10^{10}\mathrm{K}^{-1}\mathrm{s}^{-1}, \quad (\lambda\mathrm{T})_{\max} = 2{,}90\cdot10^{-3}\,\mathrm{mK}, \quad \sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}\mathrm{W/m^2K^4}$$

---

14) Wie groß ist der von dem Mantel und den Deckflächen absorbierten Wärmstrom $\dot{Q}_{abs}$?

Lösung:

$$\dot{Q}_{\mathrm{abs}} = \bar{\alpha}(r^2\pi\cos\gamma + 2rl\sin\gamma)\dot{q}_R = 12{,}641\,\mathrm{kW}$$

15) Korrigieren Sie mittels Iteration die Oberflächentemperatur der Raumstation.

Lösung:

$$\dot{Q}_{\mathrm{em}} = \bar{\varepsilon}(2r^2\pi + 2rl\pi)\sigma T_{\mathrm{Ob}}^4$$

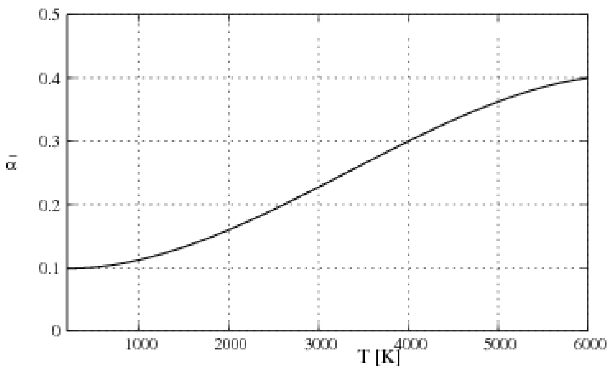
$$T_{\mathrm{Ob}} = \left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}}\frac{r^2\pi\cos\gamma + 2rl\sin\gamma}{2r^2\pi + 2rl\pi)}\dot{q}_R\right)^{1/4} = 386{,}27\,\mathrm{K}.$$

Wir werten nun $\bar{\varepsilon}$ mit dem neuen Wert für die Oberflächentemperatur der Raumstation aus:

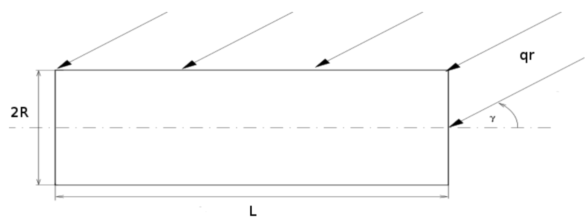
$$\bar{\varepsilon}^{(1)} = 0{,}997,$$

Somit erhalten wir die nächste Näherung:

$$T_{\mathrm{Ob}}^{(1)} = 386{,}17\,\mathrm{K}.$$



Gesamtabsorptionsvermögen $\bar{\alpha}$ als Funktion der Temperatur der Strahlungsquelle



von der Sonne bestrahlte Raumstation