

1 Die Kapazität

Ziel der Laborübung Im Rahmen der Laborübung soll der Gültigkeitsbereich der bekannten Plattenkondensatorformel Gl. (3) anhand von analytischen und numerischen Berechnungen sowie einschlägigen Messungen überprüft werden.

Grundgleichung Für grundlegende Ausführungen zum Thema Kapazität siehe *A. Precht, Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik, Band 1, Kapitel 9.3* ab Seite 168. Die dortige Gleichung (9.21) kann als Definition der Kapazität herangezogen werden:

$$\boxed{Q = C \cdot U} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{C = \frac{Q}{U}} \quad (1)$$

Unter der Kapazität einer Elektrodenanordnung verstehen wir die auf die angelegte Spannung U bezogene Ladungsmenge Q , welche sich in der entsprechenden Polarität jeweils an den Elektroden ansammelt.

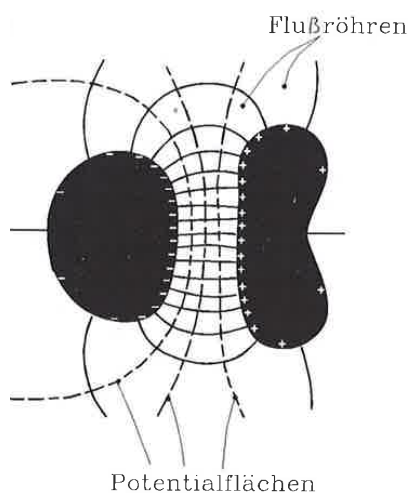


Abb. 1: Grundvorstellung

Grundvorstellung Abb. 1 illustriert die Grundvorstellung der Kapazität: Zwei geladene Elektroden repräsentieren Bereiche konstanten Potentials. Auf ihrer Oberfläche tragen sie Überschussladungen, die als Quellen und Senken der röhrenförmigen Struktur des elektrischen Flusses verstanden werden können. Dazwischen bildet sich die geschichtete Struktur der Potentialflächen aus.

Eine pauschale Beschreibung gelingt durch Anwendung des Satzes vom elektrischen Hüllenfluss $\Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V})$.

Im Falle des Plattenkondensators (Abb. 2) werden - unter Vernachlässigung von Streuflusskomponenten - homogene Feld- und Flussdichteverhältnisse angenommen.

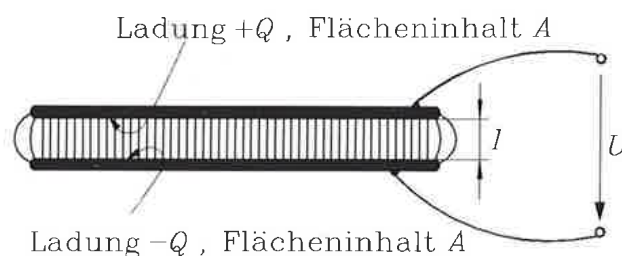


Abb. 2: Plattenkondensator

2 Allgemeines

2.1 Der luftgefüllte Plattenkondensator

Grundgleichung Eine Herleitung der Plattenkondensatorformel

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \quad (2)$$

kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\int_{\partial \mathcal{V}} \sigma \, dA}{\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{s} \, ds} = \frac{\sigma \cdot A}{E_s \cdot d} = \frac{[D_n] \cdot A}{E_s \cdot d} = \frac{\varepsilon A}{d} \quad (3)$$

Für die Gültigkeit des dritten Gleichheitszeichens ist eine **gleichförmige (= homogene) Ladungsverteilung** auf der gesamten Elektrodenoberfläche sowie eine **gleichförmige Spannungsverteilung (homogene Feldstärke)** zwischen den Elektroden Voraussetzung.



Abb. 3: Plattenkondensator mit variablem Luftspalt

Die letzte Umformung (Gültigkeit des fünften Gleichheitszeichens) setzt das idente Verschwinden der elektrischen Flussdichte (und als Folge der elektrischen Feldstärke) im Inneren der Elektrode voraus, also Modellierung der Elektroden als **ideale Leiter**.

Bei der später zu besprechenden Simulation wird die letzte Voraussetzung zwar durch Vorgabe geeigneter Randbedingungen erzwungen, die Ladungsdichteverteilung entlang der Oberfläche der Elektroden kann i.A. jedoch nicht mehr als homogen erachtet werden. Dementsprechend sind Diskrepanzen zwischen den Rechenwerten gemäß Gl. (2) und den Ergebnissen der numerischen Simulation zu beobachten.

2.2 Dielektrika

Die Wirkung dielektrischer Materialien lässt sich bei konstantem Wert der anliegenden Spannung durch entsprechend höhere Werte des elektrischen Flusses beschreiben. Dies korreliert mit einer größeren Menge der an den Elektroden angesammelten (Flächen-)ladung.

3 Übungsdurchführung

3.1 Berechnen der Kapazität des idealen luftgefüllten Plattenkondensators mit variablem Abstand

Vernachlässigung von Randstreuungen und inhomogener Ladungsverteilungen führt bekanntlich auf den Ausdruck

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \quad (4)$$

Die indirekte Proportionalität zwischen Kapazität und Plattenabstand lässt sich in doppellogarithmischem Maßstab als Gerade darstellen:

$$\lg [C(x)] = \lg \left[\frac{\varepsilon_0 A}{x} \right] \quad (5)$$

bzw.

$$\lg [C(x)] = -\lg (x) + \lg [\varepsilon_0 A] \quad (6)$$

- Aufgabe 1:** Bestimmen Sie den Durchmesser der kreisförmigen Platten $d = \dots \text{mm}$ und berechnen Sie die Kapazität des Kondensators gemäß Gl. (4) für den Abstand $x = 140 \text{ mm}$ und mindestens 5 weitere Werte im Bereich zwischen $1 \leq x \leq 50 \text{ mm}$ (siehe Tab. 1).

- Aufgabe 2:** Öffnen Sie die vorbereitete Excel-Datei `Plattenkondensator.xlsx`, speichern Sie die Datei unter einem anderen Namen ab und tragen Sie die berechneten Werte für die gewählten Abstände ein.

Plattenabstand x/mm	Kapazität C/pF
140	

Tab.1: Kapazitätsberechnung nach Gl. (4)

3.2 Messung der Kapazität des Plattenkondensators

3.2.1 Direkte Messung mit Multimeter

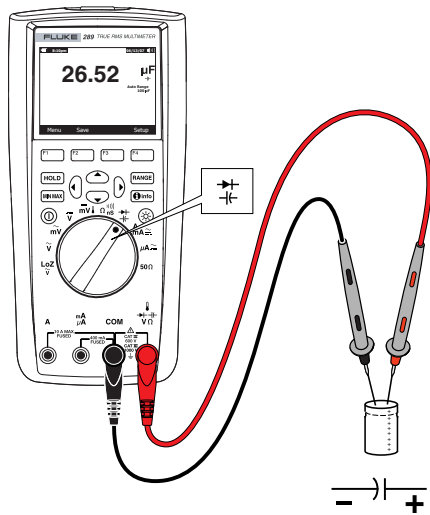


Abb. 4: Direkte Messung der Kapazität mit dem Digitalmultimeter FLUKE 289

Mit dem Multimeter FLUKE 289 können Kapazitäten direkt gemessen werden (vgl. Abb. 4). Verschaffen Sie sich damit einen Überblick über den zu erzielenden Wertebereich.

Bei großem Plattenabstand (maximal $x = 140 \text{ mm}$) ist die Kapazität des Kondensators gegenüber der Kabelkapazität C_{Kabel} bereits vernachlässigbar. Sie können auf diese Weise ohne Abklemmen des Plattenkondensators den Wert C_{Kabel} bestimmen! Dieser Wert ist von allen nachfolgenden Messwerten mit kleineren Plattenabständen zu subtrahieren (Parallelschaltung!).

- Aufgabe 3:** Messen Sie die Kapazität für $x = 140 \text{ mm}$ und dann für mindestens 10 verschiedene Abstände im Bereich $0 < x \leq 20 \text{ mm}$! Tragen Sie diese gemessenen Werte in die Tabelle Tab. 2 und in die Excel-Datei ein.

Plattenabstand x/mm	Kapazität C/pF	Plattenabstand x/mm	Kapazität C/pF
140			

Tab.2: Kapazitätswerte mittels direkter Messung mit dem Digitalmultimeter FLUKE 289

Ergänzende Fragen:

- Sind die gemessenen Werte größer / kleiner als die Rechenwerte aus Tab. 1?
- Wie erklären Sie diese Abweichung?

3.2.2 Indirekte Messung über Zeitkonstante

Eine weitere Methode zur Bestimmung unbekannter Kapazitäten ist das Ihnen bereits bekannte Verfahren zur Bestimmung der Zeitkonstanten einer RC -Schaltung (siehe Abb. 5 bzw. die Unterlagen zur Laborübung 3).

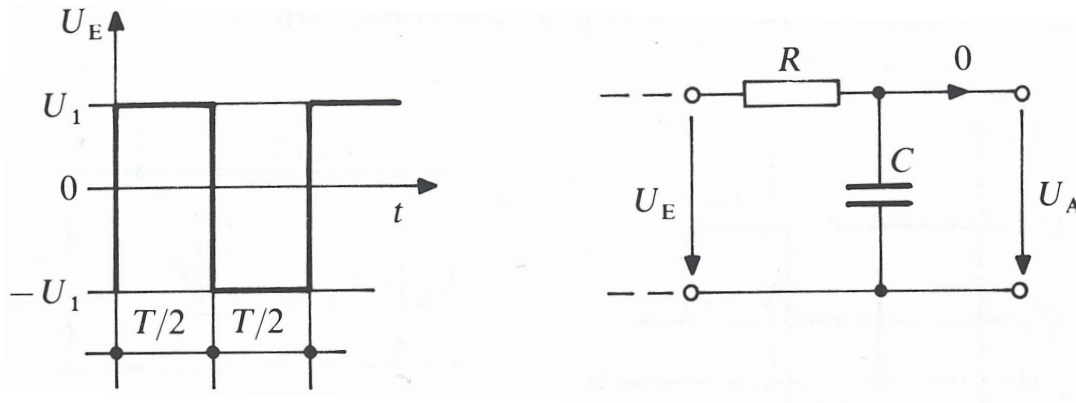


Abb. 5: RC -Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten τ .

• **Aufgabe 4:**

Bauen Sie die Schaltung nach Abb. 5 auf, wählen Sie dazu einen Widerstand $R \approx 10 \text{ k}\Omega$ und eine Frequenz des Rechtecksignals U_E im Bereich von (50...60) kHz sowie eine passende Amplitude U_1 .

Die Entladekurve der Kondensatorspannung U_A lässt sich bekanntlich folgendermaßen angeben:

$$u_A(t) = U_1 e^{-t/(RC)}.$$

In Verallgemeinerung der 5/8-Methode gilt für zwei beliebige Zeitpunkte t_1, t_2 :

$$u_A(t_1) = U_1 e^{-t_1/(RC)} \quad \text{bzw.} \quad u_A(t_2) = U_1 e^{-t_2/(RC)}.$$

Division der beiden Gleichungen führt mit $t_2 - t_1 = \Delta t$ auf

$$\frac{u_A(t_2)}{u_A(t_1)} = \frac{e^{-t_2/(RC)}}{e^{-t_1/(RC)}} = e^{(-t_2/(RC) + t_1/(RC))}$$

also

$$\frac{u_A(t_2)}{u_A(t_1)} = e^{(-\Delta t/(RC))} \quad \text{bzw.} \quad \ln \frac{u_A(t_2)}{u_A(t_1)} = -\Delta t/(RC).$$

Die gesuchte Kapazität ergibt sich zu

$$C = -\frac{\Delta t}{R \ln(u_A(t_2)/u_A(t_1))}. \quad (7)$$

Plattenabstand x/mm	Zeitintervall $\Delta t/\mu\text{s}$	Kapazität C/pF

Tab.3: Kapazitätsberechnung mittels Zeitkonstante

Hinweis 1: Günstigerweise werden für die Auswertung die Zeitpunkte t_1 und t_2 derart gewählt, dass die Augenblickswerte der Spannung ein festes Verhältnis darstellen (z.B. $u_A(t_2) \doteq 6$ Kästchen, $u_A(t_1) \doteq 3$ Kästchen $\rightarrow u_A(t_2)/u_A(t_1) = 2$)

Hinweis 2: Das Ablesen der Zeitdifferenz Δt wird durch Verwenden der Vertikal-Cursor wesentlich erleichtert!

- Aufgabe 5:** Bestimmen Sie für mindestens 10 Werte des Plattenabstandes im Bereich $0 < x \leq 20$ mm mittels Entladekurve der Kondensatorspannung die Zeitspanne Δt und ermitteln Sie daraus den Wert der Kapazität (vgl. Gl. (7)). Tragen Sie auch diese Werte in die Tabelle Tab.3 und in die Excel-Datei ein.

3.3 Simulation der Feldverhältnisse im luftgefüllten Plattenkondensator mit FEMM

Die Streuflussverhältnisse (also das Abweichen von den Idealisierungen der Gl. 2 lassen sich mit Methoden der konformen Abbildung auch analytisch näher untersuchen. Im Rahmen der Übung soll hingegen ein Softwarepaket für eine numerische Simulation Verwendung finden.

3.3.1 Fixer Plattenabstand

Die Aufgabenstellung ist bereits in einem Skript vorbereitet abgelegt. Nach Starten müssen Sie noch ergänzende Angaben bezüglich des Plattenabstandes machen. Damit kann die Berechnung durchgeführt werden.

- **Aufgabe 6:** Starten Sie das Programm FEMM, laden Sie das Skript (File → Open Lua Script → Öffnen: `Plattenkondensator.lua`) , vervollständigen Sie die Eingabedaten und führen Sie die Berechnung aus.

- **Aufgabe 7:** Durch Auswerten der Ergebnisdarstellung können Sie (interaktiv) die Spannung U zwischen den Elektroden sowie die sich auf den Elektroden angesammelte Ladungsmenge Q eruieren.

Spannung U :

- Operation → Contours
- Mit der Maus (linke Taste) einen Pfad von einer Ecke (anklicken!) der oberen Elektrode zu einer Ecke (anklicken!) der unteren Elektrode definieren (Pfad wird als rote Linie angezeigt!)
- Integrate → Line Integrals: `E.t` → OK
- Integral Result: Voltage Drop = Volts.

Ladung Q (= Fluss Ψ = Flächenintegral über die Flussdichte entlang der ausgewählten Elektrodenoberfläche!)

- Operation → Contours
- Mit der Maus (linke Taste) die Ecken des Polygonzuges der Elektrodenoberfläche anklicken (Polygonzug wird als rote Linie angezeigt!)
- Integrate → Line Integrals: `D.n` → OK
- Integral Result: Electric Flux = Coulombs.

Mit Gl. 1 ergibt sich daraus der Wert der Kapazität der aktuellen Anordnung. Tragen Sie auch diese Ergebnisse zusammen mit dem gewählten Plattenabstand in die Tabelle 4 und in die Excel-Datei ein.

- **Aufgabe 8:** Wiederholen Sie die Berechnung für mindestens 10 Werte des Plattenabstandes im Bereich $0 < x \leq 20$ mm.

Plattenabstand x/mm	Spannung zwischen den Elektroden U/V	Ladung auf Elektrodenfläche Q/Cb	Kapazität C/pF

Tab.4: Kapazitätsberechnung mittels numerischer Simulation

3.4 Gegenüberstellung und Diskussion der Ergebnisse

Stellen Sie z.B. anhand der Excel-Datei die Ergebnisse der

- analytischen Plattenkondensatorformel
- direkten Kapazitätsmessung mittels Digitalmultimeter
- Kapazitätsmessung über Zeitkonstante der Lade-/Entladekurve
- numerischen Simulation mittels FEMM

einander gegenüber und diskutieren Sie die Abweichungen.

• Aufgabe 9:

Geben Sie einen Gültigkeitsbereich der Kondensatorformel Gl.(2) an, z.B in Form eines Diagramms:

Tragen Sie die **prozentuelle Abweichung der Messwerte** (Tab. 2 und Tab. 3) vom Rechenwert (Gl.(4) bzw. Tab.1) über dem **Verhältnis Plattenabstand zu Plattendurchmesser** auf.