ÜBUNGSBLATT 4

Beispiel 13 (Translations-Operator):

Der **Translationsoperator** e^{ika} verschiebt beliebige Funktionen *f(x)* um die Strecke *a*: $f(x+a) = e^{ika} f(x)$

Zeigen Sie dass der Translationsoperator e^{ika}, mit beliebigen *a*, angewandt auf die Funktion *f(x)* einer Taylorreihenentwicklung der Funktion *f(x)* um den Punkt $x_0 = 0$ entspricht. (Tipp: der Impuls p ist gegeben durch $p = \hbar k$, der Quantenmechanische Impulsoperator ist $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$, setzen Sie den Impulsoperator anstelle des Impulses ein.)

Beispiel 14 (Blochoszillation):

Betrachten Sie ein Elektron im Leitungsband eines Halbleiters, beschrieben durch folgendes analytische Modell:

$$E(k) = \frac{E_0}{2}\left[1 - \cos(kd)\right] \qquad E_0 = 1.2 \text{ eV},\ d = 0.4 \text{ nm (Gitterkonstante).}$$

Das Elektron befinde sich zur Zeit t = 0 im Γ-Punkt ($k(t=0)=0$). Geschwindigkeit und Ort zur Zeit t = 0 seien ebenfalls Null ($v(t=0)=0$, $x(t=0)=0$). An den Halbleiter wird für t > 0 ein konstantes elektrisches Feld von ξ=10 kV/cm angelegt.

(a) Zeigen Sie, dass man ohne Berücksichtigung von Streuprozessen folgende Bewegungsgleichung für das Elektron erhält:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{E_0}{2e\xi}\left[\cos\left(\frac{e\xi d}{\hbar} t\right) - 1\right] & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

Wie groß ist die Oszillationsfrequenz? Wie groß ist die maximale Auslenkung des Elektrons? Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons? Fließt makroskopischer Strom?

(b) Nehmen Sie jetzt an, dass das Elektron alle $\tau = 100$ fs in den Γ-Punkt zurückgestreut wird und stellen Sie die Bewegungsgleichung $v(t)$ auf! Stellen Sie $v(t)$ graphisch dar! Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons? Fließt makroskopischer Strom?

Beispiel 15 (Freies Elektronengas):

In sehr vielen Fällen kann das Verhalten eines Elektrons im Festkörper durch das "Modell des freien Elektrons" beschrieben werden. In diesem Modell geht man davon aus, dass die Elektronen in einem dreidimensionalen Kastenpotential mit Abmessungen $L_x \times L_y \times L_z$ gefangen sind (Potential im Kasten ist Null). Der Einfluss des Gitters wird dabei durch eine modifizierte (effektive) Elektronenmasse m^* berücksichtigt.

(a) Leiten Sie ausgehend vom Lösungsansatz für freie Elektronen
$\psi_k(\vec{x}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \exp\left[i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\right]$
die Dispersionsrelation $E(k_x, k_y, k_z)$ her! Verwenden Sie in der Schrödingergleichung die effektive Elektronenmasse m^*!

(b) Welche Wellenvektoren $\vec{k}$ sind erlaubt? Verwenden Sie zur Herleitung die so genannten Born – von Karman Randbedingungen:
$\psi(x + L_x, y, z) = \psi(x, y, z)$
$\psi(x, y + L_y, z) = \psi(x, y, z)$
$\psi(x, y, z + L_z) = \psi(x, y, z)$

(c) Der Potentialkasten wird jetzt im k-Raum mit N Elektronen befüllt. Den höchsten befüllten k-Wert bezeichnet man als Fermivektor k_F . Berechnen Sie das befüllte Volumen im k-Raum für einen Fermivektor k_F.

(d) Berechnen Sie das (kleinstmögliche) Volumen eines Zustandes im k-Raum.

(e) Berechnen Sie den Fermivektor k_F für N Elektronen und die Fermienergie E_F. (Vorsicht, wegen Spin 2 Elektronen pro Zustand)

Beispiel 16 (Zustandsdichte):

Die Zustandsdichte hängt sowohl von der Dimensionalität des betrachteten Materials als auch von der Form der Energiebänder (=Dispersionsrelation) ab.

(a) Wie lautet die Dispersionsrelation für ein freies Teilchen? Wann kann sich ein Elektron in einem Energieband frei bewegen?

(b) Berechnen Sie unter der Annahme dass sich die Elektronen in einem Material frei bewegen können die zugehörigen Zustandsdichten in 3D, 2D und 1D.

(c) Im Jahr 2010 wurden Andre Geim und Konstantin Novoselov mit dem Nobelpreis für Physik für die theoretische Beschreibung und grundlegender Experimente an Graphen ausgezeichnet. Graphen besitzt eine lineare Dispersionsrelation $E=const \cdot k$. Berechnen Sie für Graphen die Zustandsdichte in 2D und in 1D.