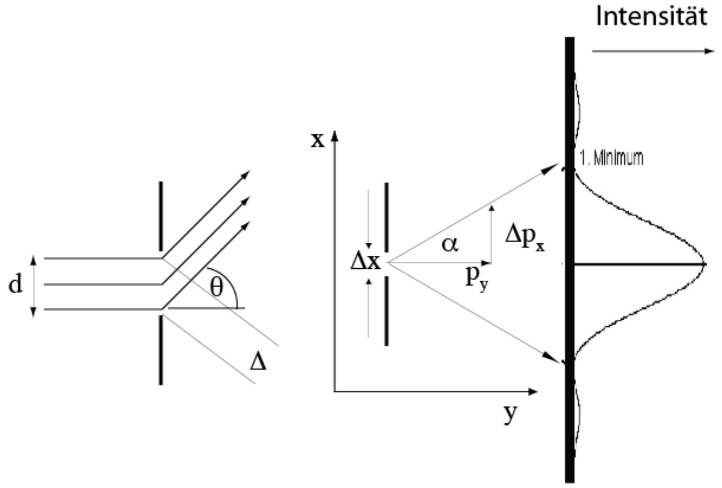
ÜBUNGSBLATT 2

Beispiel 5 (Unschärferelation):

Eine einfache, aber nicht exakte Herleitung der Heisenberg'schen Unschärferelation lässt sich aus der Beugung von Quantenobjekten mit der Wellenlänge λ am Einzelspalt gewinnen.



(a) Leiten Sie die Formel für die Lage der Beugungsminima bei der Beugung am Einzelspalt her. Hinweis: Ist der Gangunterschied Δ zwischen dem Randstrahl und dem Zentrumsstrahl λ/2, bzw. ist der Gangunterschied zwischen den Randstrahlen λ, so kommt es zur Strahlauslöschung.

(b) Abschätzung für die Impulsunschärfe Δp_x und Unschärferelation:
Auf den Spalt falle ein Parallelstrahl von Quantenobjekten mit dem Impuls p_y ein. Durch die Einengung auf den Ort Δx im Spalt weitet sich das Bündel auf dem Weg zum Schirm auf. Die Quantenobjekte erhalten nun eine Unschärfe im Querimpuls Δp_x, welche aus der Breite des Beugungsmaximums abgeschätzt werden kann. Berechnen Sie das Produkt $\Delta x \Delta p_x$.

Hinweise :
de-Broglie-Wellenlänge : p=h/λ
Verwenden Sie die Kleinwinkelnäherung : sin α= tan α

Beispiel 6 (Welle-Teilchen Dualismus - De-Broglie Beziehung):

a) Thermische Neutronen haben die Energie E_{th} = *25 meV*; die Neutronenmasse beträgt m_N=*1.675* 10^{-27} *kg*. Wie groß ist die De-Broglie Wellenlänge?

b) Ein Geschoß der Masse *m = 20 g* fliegt mit der Geschwindigkeit *v = 1000* ms^{-1}. Wie groß ist die zugehörige Materiewellenlänge? Wieso beobachtet man keine Beugungseffekte?

c) Ein C_{60} Molekül bewegt sich mit v=1000 km/h und wird an einem Doppelspalt mit Spaltabstand *d*=10 µm gebeugt. Schätzen Sie ab wie weit der Schirm / der Detektor vom Spalt entfernt sein muss damit Beugungseffekte aufgelösen werden können.

Nehmen Sie an, dass sie C_{60} Moleküle mit einem Detektor bei 1 µm auflösen können.

Beispiel 7 (Schrödingergleichung – unendlich tiefer Potentialtopf):

Ein Elektron befindet sich in einem *unendlich tiefen Potentialtopf* mit der Breite ***a***.

(a) Wie lautet die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung im Topf für die 3 niedrigsten Eigenenergien Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_3 (ohne Normierung)? Stellen Sie die Wellenfunktionen graphisch dar. Welchen Wert haben die Wellenfunktionen in den unendlich hohen Barrieren?

(b) Berechnen Sie die Eigenenergien für 2 verschiedene Breiten *a=5* nm und *a=20* nm.

(c) Berechnen Sie das Matrixelement $<\Psi_1|\Psi_3> = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x)\Psi_3(x)dx$

(die Schreibeweise $<\Psi_1|\Psi_3>$ für das Integral wird in der Quantenmechanik *Dirac-Notation* genannt)

Beispiel 8 (Orthonormalität der Eigenfunktionen):

Die Lösungen der Schrödingergleichung sind *orthonormal*, d.h. sie erfüllen die Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Eigenfunktionen des unendlich tiefen Potentialtopfes $\varphi_n(x) = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$ (für $0 \leq x \leq a$; 0 sonst) orthonormal sind!