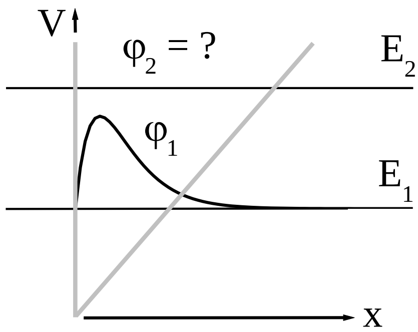
ÜBUNGSBLATT 3

Beispiel 9 (Normierung von Wellenfunktionen):

Die Lösung der Schrödingergleichung für ein Dreieckspotential wie unten gezeichnet ist nicht trivial. Deshalb verwendet man oft die Wellenfunktion

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} Ax\exp(-\frac{1}{2}bx) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

als Approximation für den untersten Eigenzustand (*A*, *b* … Konstanten).



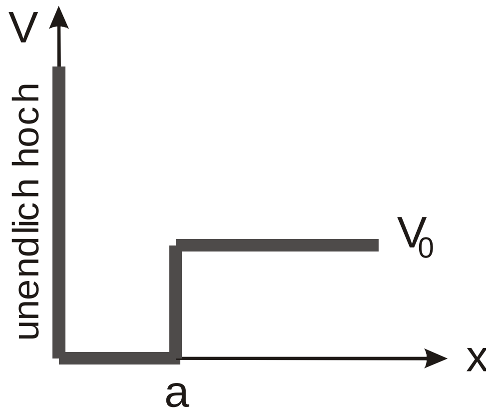
(a) Wie sieht die Wellenfunktion $\varphi_2(x)$ (schematisch) aus?

(b) Für $\varphi_2(x)$ verwendet man oft den Ansatz:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} Bx(c-bx)\exp(-\frac{1}{2}bx) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Wie ist die Konstante *c* zu wählen, damit $\varphi_2(x)$ orthogonal zu $\varphi_1(x)$ ist?

Beispiel 10 (Schrödingergleichung –endlich tiefer Potentialtopf):



(a) Zeigen Sie, daß man für den linksgezeichneten Potentialtopf für E < V_0 folgende Bestimmungsgleichung für die Eigenenergien im Topf erhält:

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} + \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}\tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a\right) = 0$$

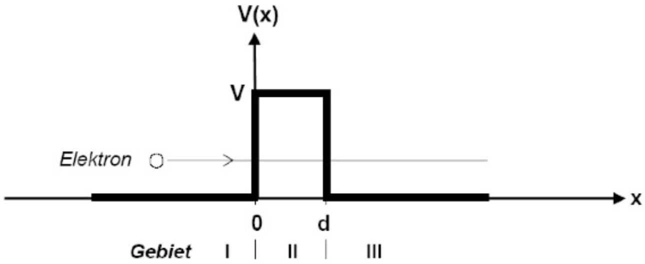
Hinweis: Die Wellenfunktion geht für $x \to \infty$ gegen Null (gebundener Zustand).

(b) Zeigen Sie graphisch, daß man aus obiger Gleichung für $V_0 \to \infty$ die Eigenenergien des unendlich tiefen Potentialtopfes erhält.

Beispiel 11 (Tunneleffekt mit unterschiedlichen Massen):

Es sei eine Tunnelbarriere aus Galliumarsenid – Aluminiumarsenid – Galliumarsenid (GaAs-AlAs-GaAs) gegeben. Gebiet I und III besehen aus GaAs und Gebiet II aus AlAs. Berechnen Sie für eine Barrierenhöhe V = 1eV und einer Elektronenenergie

von 0.5 eV für die zwei Barrierendicken d_1 = 2nm und d_2 = 5nm den Tunneltransmissionskoeffizienten T.
Man nehme an, dass die *effektive* Elektronenmasse im Bereich II anders als in Bereich I und III ist.

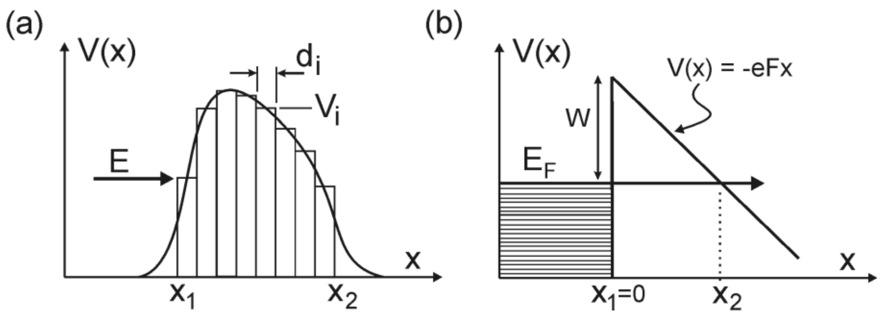


Die *effektive* Elektronenmasse ist im GaAs gleich m_{GaAs} = $0.067m_0$ und im AlAs gleich m_{AlAs} = $0.2m_0$.

(m_0 = 9.11e^{-31} kg = Masse des freien Elektrons).

Beispiel 12 (Feldemission aus Metallen):

(a) Leiten Sie, ausgehend von der Formel $T = \dfrac{4k^2\kappa^2}{4k^2\kappa^2 + (k^2+\kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa d)}$ für die Tunnelwahrscheinlichkeit durch eine Barriere der Dicke *d* folgende Näherungsformel für den Fall $\kappa d >>$ her:



$$\boxed{T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}\exp(-2\kappa d) \approx \exp(-2\kappa d)}$$

Bemerkung: Da *T* hauptsächlich durch die Exponentialfunktion bestimmt wird, kann der Vorfaktor vernachlässigt werden.

(b) Abb. (a) zeigt ein beliebiges Potential *V*(*x*) zusammengesetzt aus Rechteckbarrieren der Dicke d_i und Höhe V_i. Für jede Rechteckbarriere berechnet sich die Tunnelwahrscheinlichkeit zu $T_i \approx \exp(-2\kappa_i d_i)$. Zeigen Sie, dass man für die gesamte Tunnelwahrscheinlichkeit $T = \prod_i T_i$ mit

$\lim\limits_{d_i \to 0}$ folgende **WKB**-Formel erhält: $T \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(V(x)-E)}dx\right]$

(c) Das ***Sommerfeld Modell*** beschreibt ein Metall als einen Potentialkasten, der bis zur sog. Fermi-Energie E_F mit Elektronen befüllt ist. Elektronen können durch Anlegen eines elektrischen Feldes *F* freigesetzt werden (*Feldemission*). Es stellt sich dabei das in Abb. (b) gezeichnete Dreieckspotential ein, welches Elektronen nahe der Fermikante (d.h. mit Energie E_F) durchtunneln können. Verwenden Sie die WKB Formel um folgende Gleichung für die Feldemissionswahrscheinlichkeit herzuleiten (*W*…Austrittsarbeit):
$T(E_F) = \exp\left(-4\sqrt{2m}W^{3/2}/(3\hbar eF)\right)$.