# ÜBUNGSBLATT 4

## Beispiel 13 (Harmonischer Oszillator I):

(a) Gehen Sie von der zeitabhängigen Schrödingergleichung (SG) des harmonischen Oszillators aus und ermitteln Sie die zeit**un**abhängige SG, wenn die potentielle Energie gegeben ist durch:

$$V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2$$

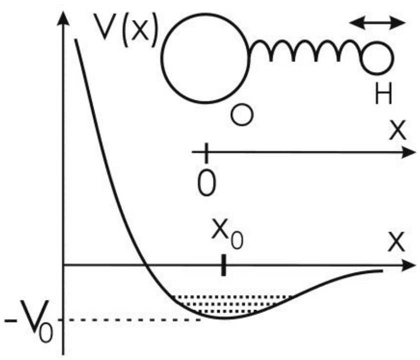
Verwenden Sie den Separationsansatz $\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot \exp\{-i\omega t\}$

(b) Die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators sind gegeben durch:

$$E_n = \hbar\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_c \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Welche Wellenlänge muß eingestrahltes Licht haben, wenn es den harmonischen Oszillator vom Zustand „n“ in den Zustand „n+1“ anregen soll?

## Beispiel 14 (Harmonischer Oszillator II ):




Im OH-Molekül schwingt das Wasserstoffatom um seine Ruhelage bei $X=X_0$. Es „sieht“ dabei das in der Abbildung gezeichnete Potential

$$V(x) = -A/x^k + B/x^l$$

wobei die Konstanten *A*, *B*, *k* und *l* empirisch ermittelt werden. Die Bewegung des Sauerstoff kann aufgrund seiner großen Masse vernachlässigt werden. Zeigen Sie, dass man für die *Vibrationseigenenergien* den Näherungsausdruck des OH-Moleküls erhält:

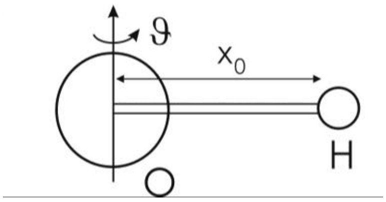
$$E_n = (n + \frac{1}{2})\frac{\hbar}{\sqrt{m}}\sqrt{Bl(l+1)x_0^{-l-2} - Ak(k+1)x_0^{-k-2}} - V_0$$

Hinweis: Verlegen Sie den Koordinatenursprung nach $X = X_0$ und entwickeln Sie $V(x)$ in eine Taylorreihe. Brechen Sie die Reihenentwicklung nach dem quadratischen Glied ab. Beachten Sie, dass die *harmonische Schrödingergleichung:*

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_n + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \varphi_n = E_n \varphi_n$$

folgende Eigenwerte besitzt: $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

**Beispiel 15 (Die Schrödingergleichung in anderen Koordinaten):**




Untersuchen wir nun die Rotationsenergien dieses OH-Moleküls. Dazu gehen Sie davon aus, dass das H-Atom um das O-Atom rotiert, ohne dass sich dadurch die Bindungslänge verändert, d.h. die Atome sind wie mit einer festen Stange verbunden (siehe Abbildung). Man spricht von einem starren Rotator.

Die Schrödingergleichung für dieses Problem lautet ( $\vartheta$ : Winkel) :

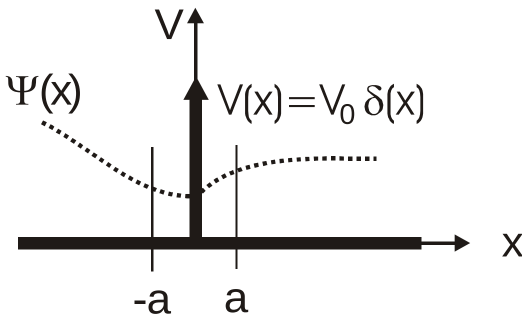
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{x_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\varphi(\vartheta) = E\varphi(\vartheta)$$

Zeigen Sie, dass man folgenden Ausdruck für die Rotationseigenenergien erhält:

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mx_0^2}$$

Hinweis: Randbedingung: $\varphi(\vartheta) = \varphi(\vartheta + 2\pi)$.

**Beispiel 16 (Delta-Potenzial):**




Das Bild zeigt eine (beliebige) Wellenfunktion $\Psi$(x) in der Umgebung eines sogenannten *Delta-Potentials* $V(x) = V_0\delta(x)$, wobei $\delta(x)$ die Dirac'sche Deltafunktion bezeichnet. Die Wellen-funktion an einem Delta-Potential ist stetig, d.h.: $\Psi(0_-) = \Psi(0_+)$! Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Wellenfunktion folgendes gilt:

$$\Psi'(0_+) - \Psi'(0_-) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\Psi(0)$$

Hinweis: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung von ***–a*** bis ***a*** und bilden Sie dann $\lim_{a\to 0}$

Beachten Sie, dass $\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$.