# Übungsblatt 3

## Beispiel 9: Unendlich tiefer Potentialtopf (ohne Unterlagen)

Ein Elektron befindet sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf (V$\rightarrow \infty$) mit der Breite a.

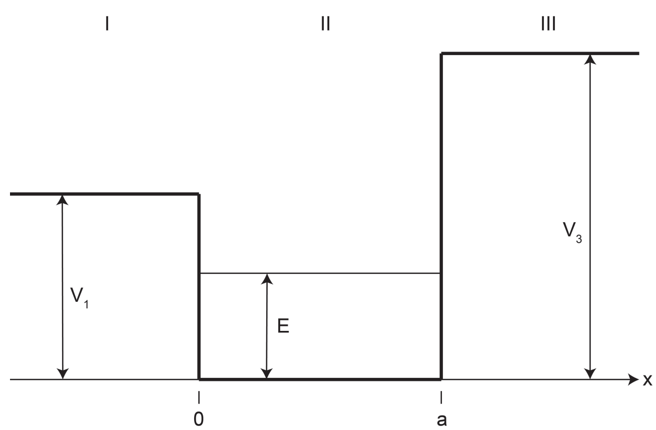
(a) Wie lautet die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung im Topf für die 3 niedrigsten Eigenenergien $\Psi_1$, $\Psi_2$ und $\Psi_3$ (ohne Normierung)? Stellen Sie die Wellenfunktionen graphisch dar.

(b) Da der Hamiltonoperator hermitesch ist, sind die Eigenfunktionen orthogonal zueinander. Das heißt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi *_n (x)\varphi_m(x)dx = 0 \qquad (1)$$

für $m \neq n$. Berechnen Sie die Normierung der Eigenfunktionen wenn die Lösungen der Schrödingergleichung nicht nur orthogonal sondern orthonormal sind. Dies bedeutet, dass das Integral in Gleichung 1 gleich 1 ist für $m = n$.
Hinweis: Substituiere $2 \cdot \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$.

## Beispiel 10: Asymmetrischer Potentialtopf (ohne Unterlagen)




Betrachten Sie einen eindimensionalen Potentialtopf der Breite a mit endlich hohen und unterschiedlich hohen Potentialbarrieren. Im Bereich I hat das Potential den Wert $V_1$, im Bereich II ist das Potential $V_2 = 0$ und im Bereich III ist das Potential $V_3 > V_1$. Stellen Sie in allen 3 Bereichen einen Ansatz für eine Wellenfunktion auf, deren Energie $E = \hbar^2 k^2/(2m) \leq V_1$ ist. Stellen Sie die Stetigkeitsbedingungen auf. Aus diesen Stetigkeitsbedingungen lässt sich folgende Formel ableiten

$$1 = exp(-2i(ka - \varphi_1 - \varphi_3)) \tag{2}$$

wobei $\cos(\varphi_1) = \sqrt{E/V_1}$ und $\cos(\varphi_3) = \sqrt{E/V_3}$. Argumentieren Sie, dass die Gleichung für $E \leq V_1$ immer mindestens eine Lösung hat. Lösen Sie die Gleichung graphisch für die beiden Fälle $2mV_1a^2/\hbar^2 = 2mV_3a^2/\hbar^2 = \pi^2$ sowie $2mV_1a^2/\hbar^2 = 0.4\pi^2$ und $2mV_3a^2/\hbar^2 = 0.5\pi^2$. Wieviele gebundene Zustände gibt es wenn $E > V_1$?

## Beispiel 11: Harmonischer Oszillator (ohne Unterlagen)

a) Gehen Sie von der zeitabhängigen Schrödingergleichung (SG) des harmonischen Oszillators aus und ermitteln Sie die zeitunabhängige SG, wenn die potentielle Energie gegeben ist durch

$$V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2. \tag{3}$$

Verwenden Sie den Separationsansatz $\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot exp(-i\omega t)$. Welche Bedingung muss eine Potentialfunktion erfüllen, damit die Separation gerechtfertigt ist?

b) Die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators sind gegeben durch

$$E_n = \hbar\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_c \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{4}$$

Welche Wellenlänge muss eingestrahltes Licht haben, wenn es den harmonischen Oszillator vom Zustand "n" in den Zustand "n+1" anregen soll? Zeichnen Sie schematisch das Potential inklusive Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

## Beispiel 12: Gekoppelte Quantentöpfe (mit Unterlagen)

Besuchen Sie `http://phet.colorado.edu/en/simulation/band-structure`. Erstellen Sie 3 Quantentöpfe mit einer Barrierendicke von 0.2nm einer Quantentopfbreite von 0.4nm und einem Potential von 6eV.

a) Zeichne die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der untersten 3 Energieniveaus. Was ist der Unterschied zwischen diesen Energieniveaus? Was bedeutet ein Überlapp der Wellenfunktionen?

b) Was ist der Unterschied zwischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit und Wellenfunktion?

c) Wie muss die Potentiallandschaft verändert werden um den Energieabstand zwischen den 3 untersten Niveaus zu vergrößern? Was passiert dabei mit $\Psi_{4,5,6}$?

d) Lege ein elektrisches Feld von 0.5V/nm an. Erläutern Sie den Unterschied zum feldfreien Szenario.