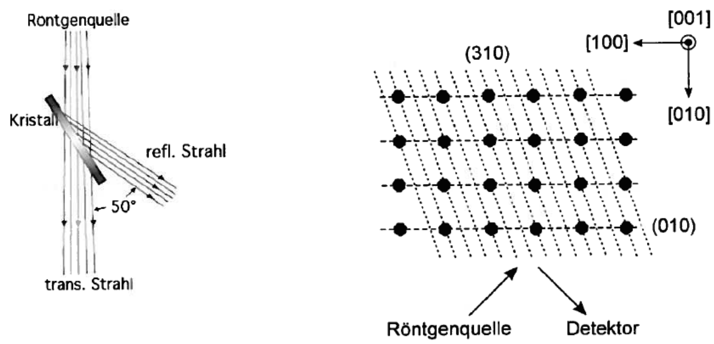
Übungsblatt 6

(alle Aufgaben mit Unterlagen)

Beispiel 21: Bragg-Bedingung

Eine breitbandige Röntgenstrahlung trifft auf einen einfach kubischen Kristall mit einer Gitterkonstante von 0.4 nm. Der Winkel zwischen dem transmittierten und dem reflektierten Strahl beträgt 50°.



a) Leiten Sie die Bragg-Bedingung ab.

b) Wie groß ist die Energie der reflektierten Röntgenphotonen für die ersten 3 Peaks?

c) Gegeben sei ein einfach kubischer Kristall, bestehend aus nur einer Atomsorte und mit einer Gitterkonstanten von $a = 0.4\,\mathrm{nm}$. Der Kristall wird mit monochromatischem Röntgenlicht der Wellenlänge $\lambda = 0.15\,\mathrm{nm}$ senkrecht zur [001]-Achse bestrahlt. Um diese Achse sei er so orientiert, dass der (010)-Reflex in erster Ordnung erscheint. Berechnen Sie den Winkel um den der Kristall gedreht werden muss, damit der (310)-Reflex erscheint. Die Richtung des einfallenden Röntgenstrahls bleibe dabei unverändert.

Beispiel 22: Phononen in linearer Kette

Gegeben sei eine unendlich lange lineare Anordnung von Massepunkten der Masse M, welche in Ruhelage den gegenseitigen Abstand a aufweisen. Jeder Massepunkt sei mit seinen beiden nächsten Nachbarn durch eine Kraftkonstante F gekoppelt. Die Massepunkte sollen sich longitudinal auslenken lassen, wobei die Auslenkung des Massepunktes n aus seiner Ruhelage durch die Koordinate u_n beschrieben wird.

a) Stellen Sie für die Koordinate u_n einer longitudinalen Auslenkung des Massepunktes n die Bewegungsgleichung auf.

b) Leiten Sie unter Verwendung des Lösungsansatzes $u_n = A \exp i(nka - \omega t)$ die Dispersionsrelation $\omega(k)$ der Phononen her.
Hinweis: $[1 - \cos(x)]/2 = \sin^2(x/2)$.

c) Untersuchen Sie die Dispersionsrelation für $k \to 0$ und leiten Sie daraus einen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit ab.

d) Diskutieren Sie das Verhalten der Gruppengeschwindigkeit für $k \to \pm\pi/a$.

Beispiel 23: Lineare Kette mit 2 Federkonstanten

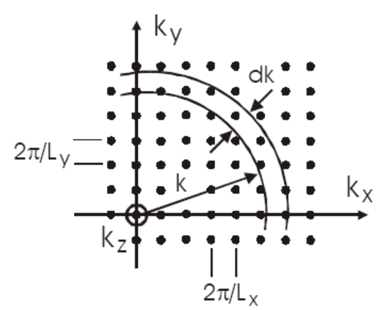
a) Leiten Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für eine lineare Anordnung von Teilchen identischer Massen her, die abwechselnd durch zwei verschiedene Arten von Federn mit unterschiedlichen Federkonstanten (F_1 und F_2) verbunden sind. Der Abstand zwischen den Teilchen sei a.

b) Vergleichen Sie die in a) erhaltene Dispersionsrelation mit der für identische Federn. Setzen Sie hierzu $F_1 = F_2$ und überprüfen Sie, ob Sie das Ergebnis aus Beispiel 22 erhalten.

Beispiel 24: Zustandsdichte

Zeigen Sie, dass man für ein *nicht-parabolisches* Energieband der Form $E(1 + \alpha E) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ (mit der Konstante α; z.B. GaAs: $\alpha = 0.67\,\mathrm{eV}^{-1}$) in einem Halbleiter ($L_x \times L_y \times L_z$) folgenden Ausdruck für die sogenannte Zustandsdichte (= Anzahl der Zustände je Volumen im Energieintervall $E \to E + dE$) erhält:

$$Z(E) = \frac{1}{L_x L_y L_z} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} m^{*\frac{3}{2}} (1 + 2\alpha E) \sqrt{E(1 + \alpha E)}. \qquad (1)$$



Hinweis: Überlegen Sie, welches Volumen ein Zustand im k-Raum einnimmt (Born-von Karman Randbedingung). Wie viele Elektronen finden im k-Raum in einer Kugelschale der Dicke dk Platz (siehe Abbildung)? Beachten Sie, dass jeder Zustand von zwei Elektronen besetzt werden kann. Berechnen Sie daraus zuerst die Anzahl der Zustände im Bereich $k \to k + dk$ und daraus mit Hilfe der Dispersionsrelation im Energiebereich $E \to E + dE$.