KOMPLEXE WECHSELSTROMRECHNUNG

Ein lineares Netzwerk, in dem alle Wechselgrößen Sinusfunktionen der Kreisfrequenz ω sind (eingeschwungener Zustand), kann wie ein lineares Widerstandsnetzwerk behandelt werden, wenn man die Ströme und Spannungen durch ihre <u>komplexen Zeiger</u> ($\underline{I}, \underline{U}$) ersetzt und R, L, C durch ihre <u>komplexen Widerstände</u> ($\underline{Z}_R, \underline{Z}_L, \underline{Z}_C$) beschreibt:

$$\boxed{u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \underline{U} = U \cdot \exp(j\varphi_U)} \qquad \boxed{\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = j\omega L, \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}}$$

<u>Komplexer Übertragungsfaktor $\underline{G}$</u> = das Verhältnis zweier Ströme/Spannungen im Netzwerk.
Statt $\underline{G}$ werden häufig andere Symbole verwendet, z.B.: $\underline{v}_u = v_u \cdot \exp(j\varphi) = \underline{U}_a / \underline{U}_e$

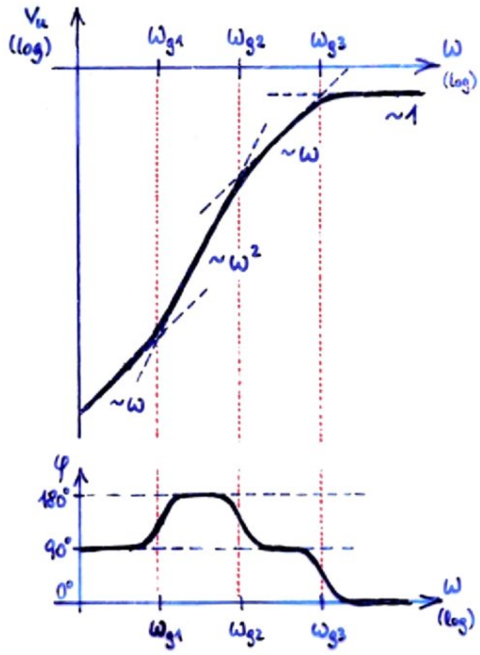
<u>Bodediagramm</u> von $\underline{v}_u$: $\lg v_u(\lg\omega)$ und $\varphi(\lg\omega)$

Komplexe Übertragungsfaktoren von stabilen, zeitinvarianten, linearen Netzwerken lassen sich darstellen als Produkt bzw. Quotient von Termen der Form

	Term	$\omega \ll \omega_{gi}$	$\omega \gg \omega_{gi}$
1.)	$K \cdot j\omega$	keine Grenzfrequenz	
2.)	$1 \pm j\frac{\omega}{\omega_{gi}}$	≈ 1	$\approx j\frac{\omega}{\omega_{gi}}$
3.)	$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{gi}}\right)^2 + j\theta\frac{\omega}{\omega_{gi}}$	≈ 1	$\approx -\left(\frac{\omega}{\omega_{gi}}\right)^2$

$K, \theta(<2), \omega_{gi}$ ... Konstante

ω_{gi} ... <u>Grenzfrequenz</u>



<u>**Beispiel**</u>:

$$\underline{v}_u = j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_{g1}}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{g2}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{g3}}\right)}$$

mit $\omega_{g1} \ll \omega_{g2} \ll \omega_{g3}$

$\omega \ll \omega_{g1}$: $\quad \underline{v}_u \approx \frac{1}{\omega_0} \cdot (j\omega)$

$\omega_{g1} \ll \omega \ll \omega_{g2}$: $\quad \underline{v}_u \approx \frac{1}{\omega_0 \omega_{g1}} \cdot (j\omega)^2$

$\omega_{g2} \ll \omega \ll \omega_{g3}$: $\quad \underline{v}_u \approx \frac{\omega_{g2}}{\omega_0 \omega_{g1}} \cdot (j\omega)$

$\omega \gg \omega_{g3}$: $\quad \underline{v}_u \approx \frac{\omega_{g2}\omega_{g3}}{\omega_0 \omega_{g1}}$

EINSCHWINGVERHALTEN IN LINEAREN NETZWERKEN 1. ORDNUNG

Lineare Netzwerke 1. Ordnung haben im <u>Nenner</u> des Übertragungsfaktors nur <u>einen</u> Faktor der Form $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_g}\right)$. Die wichtigsten Beispiele sind Netzwerke mit nur <u>einem</u> C oder L, die ansonsten lineare Widerstandsnetzwerke sind.

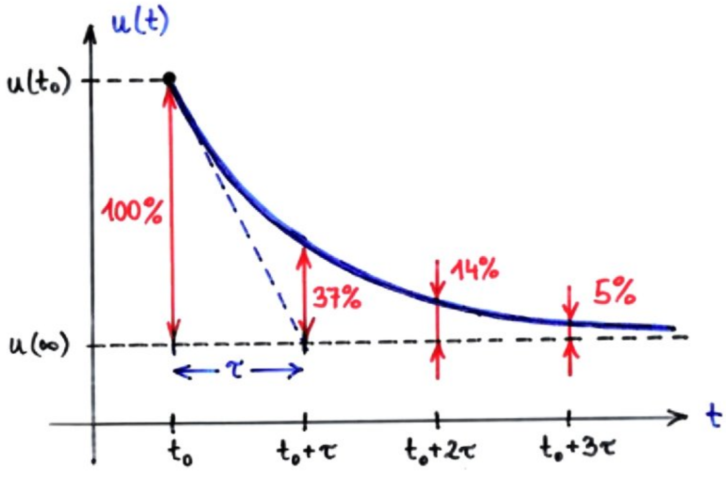
Das Einschwingverhalten jeder Spannung bzw. jedes Stromes in einem solchen Netzwerk hat einen exponentiell abklingenden Zeitverlauf

$$\boxed{u(t) - u(\infty) = [u(t_0) - u(\infty)] \cdot \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)}$$

$u(t_0)$ ... Anfangszustand

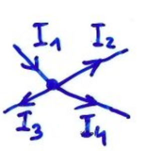
$u(\infty)$ ... stationärer Endzustand

$\boxed{\tau = 1/\omega_g}$ ... Zeitkonstante

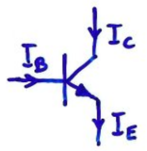


KIRCHHOFFSCHE GESETZE

1. An jedem Knoten bzw. konzentrierten Bauelement ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

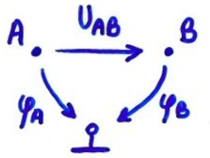


$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$



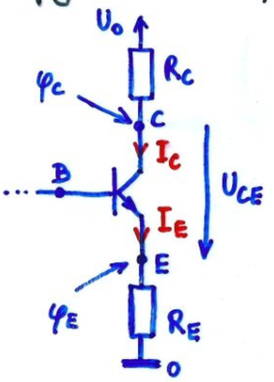
$$I_B + I_C = I_E$$

2. Die Spannung zwischen zwei Knoten ist gleich der Differenz der Knotenpotentiale. Das Knotenpotential ist die Spannung zwischen dem Knoten und einer willkürlich definierten „Masse".

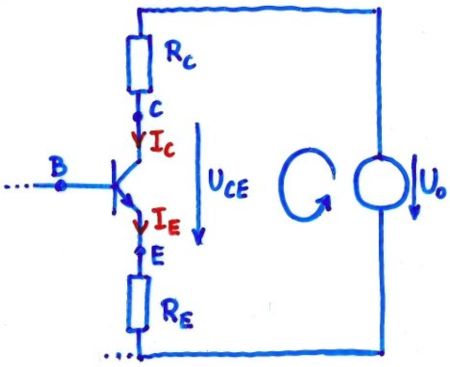


$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

Diese Formulierung des 2. Kirchhoffschen Gesetzes ist der bekannten „Maschenregel" häufig vorzuziehen, da sie weniger anfällig auf Vorzeichenfehler ist.



$$\varphi_C = U_0 - R_C I_C$$
$$\varphi_E = R_E I_E$$
$$U_{CE} = \varphi_C - \varphi_E = U_0 - R_C I_C - R_E I_E$$

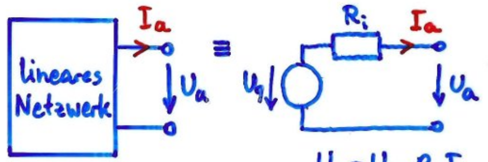


$$R_C I_C + U_{CE} + R_E I_E - U_0 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$U_{CE} = U_0 - R_C I_C - R_E I_E$$

LINEARE WIDERSTANDSNETZWERKE

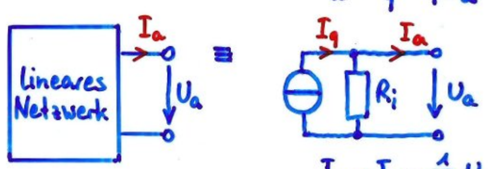
= Netzwerke aus unabhängigen Quellen, Ohmschen Widerständen und linear gesteuerten Quellen

Thevenin-Theorem: Jedes lineare Widerstandsnetzwerk mit 2 Klemmen lässt sich bezüglich des Klemmenverhaltens durch eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand ersetzen.



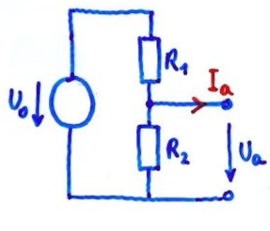
$$U_a = U_q - R_i I_a$$

Norton-Theorem: Jedes lineare Widerstandsnetzwerk mit 2 Klemmen lässt sich bezüglich des Klemmenverhaltens durch eine Stromquelle mit Innenwiderstand ersetzen.



$$I_a = I_q - \frac{1}{R_i} U_a$$

Die Ersatzgrößen U_q und I_q sind die Leerlaufspannung $U_L = U_a(I_a = 0)$ bzw. der Kurzschlussstrom $I_K = I_a(U_a = 0)$ der ursprünglichen Schaltung.
Die Ersatzgröße R_i ist der Innenwiderstand der ursprünglichen Schaltung. Man erhält ihn durch $R_i = \frac{U_L}{I_K}$ oder, indem man im ursprünglichen Netzwerk alle unabhängigen Quellen null setzt und den Widerstand zwischen den Klemmen bestimmt.



$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$
$$I_K = U_0 / R_1$$
$$R_i = R_1 \| R_2$$

Superpositionsgesetz: Die Wirkung mehrerer unabhängiger Quellen ist gleich der Summe der Wirkungen jeder einzelnen Quelle, wobei jeweils alle anderen Quellen null gesetzt werden.
„Wirkung" = Strom oder Spannung im Netzwerk zufolge der Quelle(n).