Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierungstechnik
am 20.06.2008

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	9	11	11	40
erreichte Punkte					

Bearbeitungshinweise:

- Bitte Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt eintragen.
- Bitte die Aufgaben auf separaten Blättern rechnen, nicht auf dem Angabebatt!
- Für jede Aufgabe eine neue Seite beginnen.
- Auf jedem Blatt den Namen, sowie die Matrikelnummer angeben.
- Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich!

Viel Erfolg!

1. Abbildung 1 zeigt ein RLC-Netzwerk bestehend aus drei elektrischen Widerständen R, einem linearen Kondensator C und einer nichtlinearen Induktivität, welche in der Form

$$L(i_L) = L_0 + L_1 i_L^2, \quad L_0, L_1 > 0$$

als Funktion des Spulenstromes i_L gegeben ist.

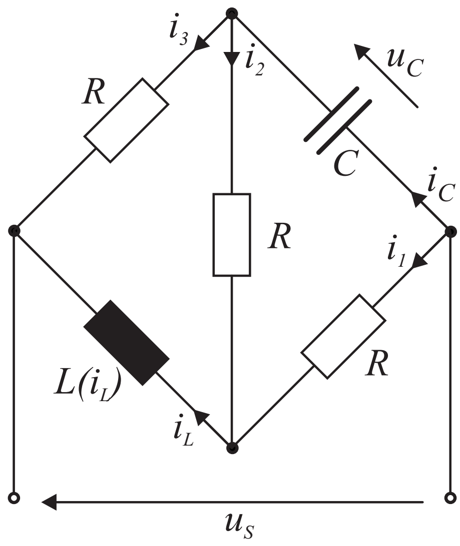


Abbildung 1: RLC-Netzwerk.

Die Eingangsgröße u des Systems ist die Spannung u_S und die Ausgangsgröße y die Spannung am Kondensator u_C.

a) Wählen Sie für die in Abbildung 1 dargestellte Schaltung geeignete Zustandsgrößen $\mathbf{x}$ und erstellen Sie das nichtlineare Zustandsmodell in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y &= g(\mathbf{x}, u). \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ für $u = u_R = 0$.

c) Linearisieren Sie das Zustandsmodell um die Ruhelage $\mathbf{x}_R$, u_R und geben Sie es in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{aligned}$$

an. *Hinweis:* Explizites Einsetzen der Ruhelagen ist nicht erforderlich.

2. Gegeben ist die Strecke

$$G(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)}$$

a) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der Streckenübertragungsfunktion. Verwenden Sie hierzu die beiliegende Vorlage.

b) Entwerfen Sie für die Strecke $G(s)$ mit dem Frequenzkennlinienverfahren einen Regler $R(s)$ mit dem der geschlossene Regelkreis folgende Spezifikationen erfüllt:

- Anstiegszeit $t_r = 1.5\,\mathrm{s}$
- Prozentuelles Überschwingen ü$= 30\%$
- Bleibende Regelabweichung $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

i) Geben Sie die Anforderungen an den offenen Kreis an. Welches Übertragungsglied benötigen Sie für den Regler, um diesen Anforderungen gerecht zu werden? *Hinweis:* Verwenden Sie die Näherung $\arctan(0.5) \approx 25°$.

ii) Berechnen Sie die Reglerkoeffizienten.

Betrachten Sie für die folgenden Teilaufgaben den geschlossenen Regelkreis nach Abbildung 2.

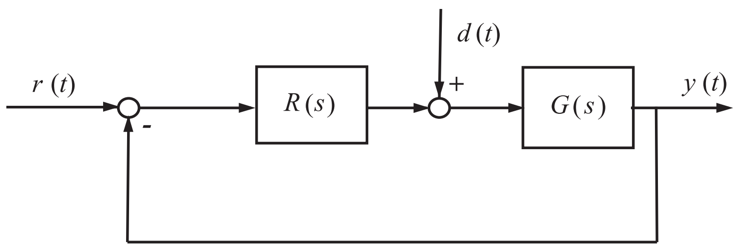


Abbildung 2: Geschlossener Kreis.

c) Auf den Eingang der Strecke wirkt eine Störung der Form

$$d(t) = 0.5\sin(4t) + 0.1\sigma(t).$$

Bestimmen Sie die eingeschwungene Lösung des Ausgangs $y(t)$ für $r(t) = 0$.
Hinweis: Die numerischen Endergebnisse müssen nicht explizit berechnet werden.

3. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Skizzieren Sie kurz 3 Möglichkeiten zur Überprüfung der vollständigen Beobachtbarkeit eines linearen zeitinvarianten Systems.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft der vollständigen Beobachtbarkeit eines linearen zeitinvarianten Systems invariant gegenüber regulären Zustandstransformationen der Form $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ ist.

c) Gegeben ist das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k.$$

Überprüfen Sie mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests die vollständige Erreichbarkeit des Systems.

d) Zeigen Sie, dass zu einem Eigenwert λ_i einer Matrix $\mathbf{A}$ der Linkseigenvektor $\mathbf{w}_i^T$ von $\mathbf{A}$ gleich dem transponierten Rechtseigenvektor $\mathbf{v}_i$ der transponierten Matrix $\mathbf{A}^T$ ist.

e) Gegeben ist das System 3. Ordnung der Form

$$y_{k+3} + 3\sin\left(y_{k+2}\right) + 5\sqrt{u_k} = \frac{\pi}{10} e^{y_{k+1}}.$$

Stellen Sie dieses System in der Form eines Systems von Differenzengleichungen 1.Ordnung

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{f}\left(\mathbf{z}_k, u_k\right)$$
$$y_k = g\left(\mathbf{z}_k\right)$$

dar.

f) In Abbildung 3 sind die Ortskurven der offenen Kreise $L_1(I\omega)$ und $L_2(I\omega)$ dargestellt. Beide Übertragungsfunktionen besitzen keinen Pol auf der Imaginärachse und keine Pole in der rechten Halbebene. Beurteilen Sie die Stabiltität der einzelnen geschlossenen Regelkreise $G_1(I\omega) = \frac{L_1(I\omega)}{1+L_1(I\omega)}$ und $G_2(I\omega) = \frac{L_2(I\omega)}{1+L_2(I\omega)}$.

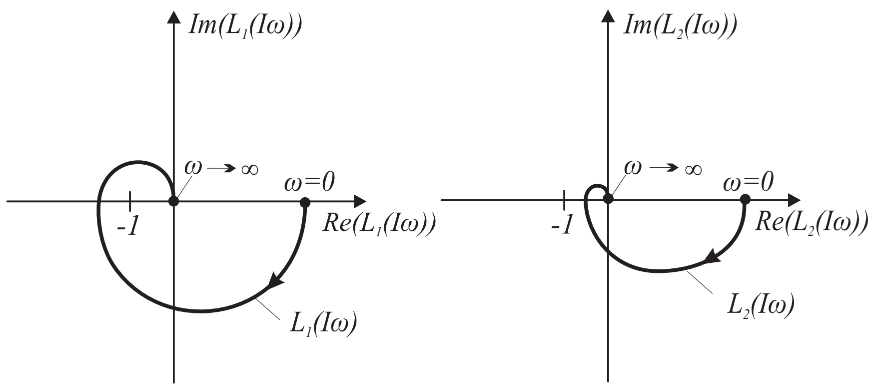


Abbildung 3: Ortskurven der offenen Kreise $L_1(I\omega)$ und $L_2(I\omega)$.

4. Betrachten Sie das folgende lineare, zeitinvariante Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \ .$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Erreichbarkeitsmatrix, dass das Abtastsystem nicht vollständig erreichbar ist.

b) Spalten Sie das System mit Hilfe einer regulären Zustandstransformation in einen erreichbaren Teil mit dem Zustand $\mathbf{z}_{1,k}$ und einen nicht erreichbaren Teil mit dem Zustand $z_{2,k}$ auf.

Hinweis: Für Blockmatrizen der folgenden Struktur gilt

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^{-1} \\ \mathbf{G}_1^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

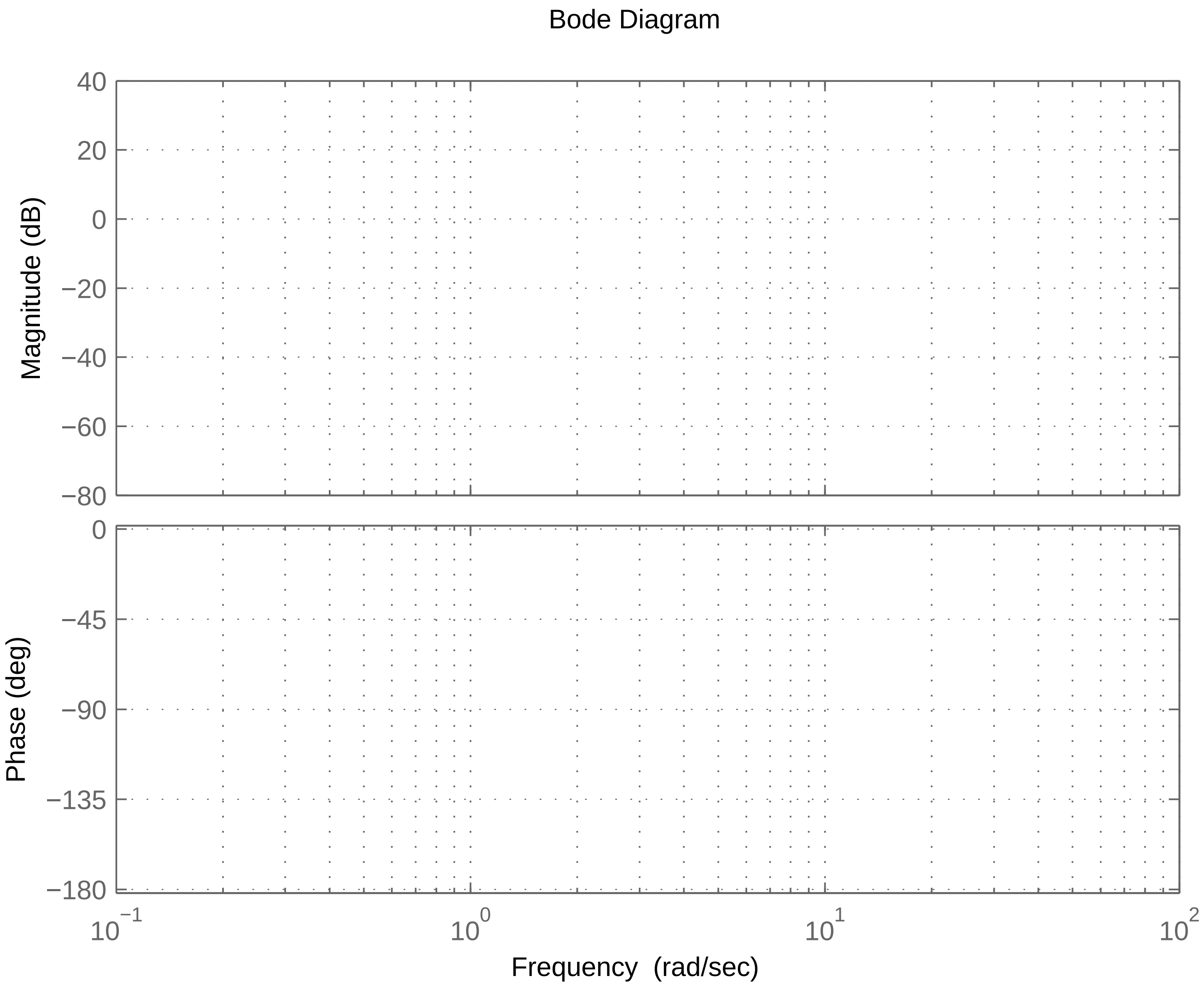
für $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

c) Entwerfen Sie für das vollständig erreichbare Teilsystem in (b) einen PI-Zustandsregler der Form $u_k = \mathbf{k}^T \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1,k} \\ z_{I,k} \end{bmatrix}$ in Abhängigkeit von allgemeinen Koeffizienten p_0, p_1, p_2 eines gewünschten charakteristischen Polynoms. Verwenden Sie die Formel von Ackermann.

d) Kann man erwarten, dass der in c) entworfene Regler auch das Gesamtsystem stabilisiert?

e) Wie müsste man unter der Voraussetzung einer stabilen Strecke und verschwindenden Anfangsbedingungen den Parameter k_P eines PI-Zustandsreglers der Form $u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x^T & k_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1,k} \\ z_{I,k} \end{bmatrix} + k_P \left(r_k - y_k \right)$ wählen, dass die Stellgröße u_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ den gleichen Wert annimmt, welcher auch für $k \to \infty$ zur Einhaltung der Bedingung $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = r_0$ benötigt wird?

Hinweis: Argumentieren Sie über die Übertragungsfunktion der Strecke.


Bode Diagram
Magnitude (dB)
40
20
0
−20
−40
−60
−80
Phase (deg)
0
−45
−90
−135
−180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)