Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierungstechnik
am 03.04.2009

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	11	8	12	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, nicht auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können

☐ Mi, 08.04.2009 ☐ Do, 09.04.2009 ☐ Mo, 20.04.2009 ☐ Di, 21.04.2009

Viel Erfolg!

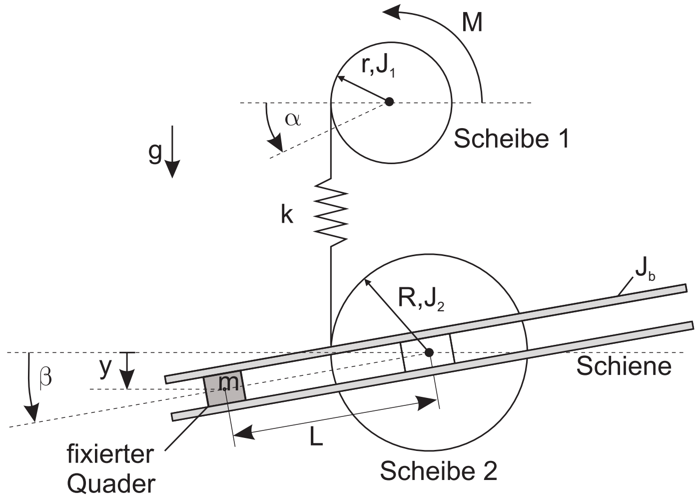

Abbildung 1: Mechanisches System

1. Ein als Punktmasse $m > 0$ zu betrachtender Quader ist zwischen zwei Schienen (Trägheitsmoment J_b) fixiert, welche fest mit einer Scheibe (Scheibe 2: Radius $R > 0$, $J_2 > 0$) verbunden ist (siehe Abbildung 1). Diese Scheibe wird über einen Seilzug, wobei im dargestellten Fall das Seil näherungsweise als Feder mit kubischer Federkraft F_f betrachtet werden kann ($F_f = k\Delta L^3$ mit der Längenänderung des Seils ΔL), und eine Antriebsscheibe (Scheibe 1: Radius $r > 0$, $J_1 > 0$), auf welche das Moment M wirkt, bewegt. Außerdem wirkt die Gravitationskraft mit der Gravitationskonstanten g.

   a) Bestimmen Sie das zugehörige mathematische Modell in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ und $y = h(\mathbf{x}, u)$ mit der Eingangsgröße $u = M$, dem Vertikalabstand y des Quaders als Ausganggröße und geeigneten Zustandsgrößen $\mathbf{x}$.
   Hinweis: Trägheitsmoment = Masse * (Abstand)^2

   b) Wie groß muss das Moment M gewählt werden, um das System an der Position $\beta = \beta_0$ halten zu können?

   c) Linearisieren Sie das mathematische Modell um die zu $\beta = 0°$ zugehörige Ruhelage und bringen Sie das linearisierte System in die Form $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$, $\Delta y = \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u$.

   d) Nach entsprechender Transformation lässt sich das lineare System auch in der Form

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ -0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \overline{\mathbf{b}}\Delta u, \quad \Delta y = \overline{\mathbf{c}}^T\Delta\mathbf{x}$$

   darstellen. Ist das System BIBO stabil? Wenn nicht, geben Sie ein beschränktes Eingangssignal Δu vor, welches für $t \to \infty$ ein unbeschränktes Ausgangssignal Δy zur Folge hat.

2. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

a) Gegeben ist das diskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 3b_1 \\ \frac{1}{b_1} \end{bmatrix} u_k,$$

welches mit einem Zustandsregler der Form

$$u_k = k_1 x_{1,k} + k_2 x_{2,k}$$

geregelt wird.

i) Wie lauten die Koeffizienten des Zustandsreglers allgemein

$$k_1 = k_1(p_1, p_0),$$
$$k_2 = k_2(p_1, p_0),$$

wenn die Eigenwerte des geschlossenen Kreises der Gleichung

$$z^2 + p_1 z + p_0 = 0$$

genügen.

ii) Wie müssen k_1 und k_2 gewählt werden, um ein Dead–Beat Verhalten zu erzielen?

iii) Skizzieren Sie in der k_1–k_2 Ebene jenen Parameterbereich für $b_1 = 1$, für den sich ein geschlossener Kreis mit einem Pol bei 0 und einem stabilen Pol ergibt.

iv) Für die Realisierung des Zustandsreglers wird ein Beobachter benötigt. Kann in diesem Fall für $b_1 = 1$ ein trivialer Beobachter eingesetzt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.

b) Gegeben ist die s–Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s + 0.01)(s + 10)}{s(s^2 + 6s + 5)}$$

Welche der folgenden q–Übertragungsfunktionen kommen als entsprechende q–Transformierte von $G(s)$ in Frage, wenn die Abtastzeit $T_a = 4s$ beträgt? Begründen Sie auch, weshalb eine entsprechende Übertragungsfunktion nicht in Frage kommt.

I)

$$G^{\#}(q) = \frac{(1 + \frac{q}{0.51})(1 + \frac{q}{0.01})(1 - \frac{q}{0.5})}{50q(\frac{q^2}{0.5} + \frac{q}{0.5} + 1)}$$

II)

$$G^{\#}(q) = \frac{(1 + \frac{q}{0.51})(1 + \frac{q}{0.01})(1 - \frac{q}{0.5})}{5q(\frac{q}{0.5} + 1)(\frac{q}{0.48} + 1)}$$

III)

$$G^{\#}(q) = \frac{(1 + \frac{q}{0.51})(1 + \frac{q}{0.01})(1 - \frac{q}{0.25})}{50q(\frac{q}{0.5} + 1)(\frac{q}{0.48} + 1)}$$

IV)

$$G^{\#}(q) = \frac{(1 + \frac{q}{0.51})(1 + \frac{q}{0.01})(1 - \frac{q}{0.5})}{50q(\frac{q}{0.5} + 1)(\frac{q}{0.48} + 1)}$$

V)

$$G^{\#}(q) = \frac{(1 + \frac{q}{0.51})(1 + \frac{q}{0.01})(1 - \frac{q}{0.5})}{50(\frac{q}{2} + 1)(\frac{q}{0.5} + 1)(\frac{q}{0.48} + 1)}$$

c) Gegeben ist die Impulsantwort eines zeitdiskreten Systems 2. Ordnung $(g_k) = (0, 10, 4, \frac{8}{5}, \frac{16}{25}, \frac{32}{125}, ...)$ zu den Zeitpunkten $t_k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. Können Sie aus dieser Information eine Aussage bzgl. der vollständigen Erreichbarkeit und der vollständigen Beobachtbarkeit machen und wenn ja welche?
Hinweis: Die Hankelmatrix lautet

$$\mathbf{H}[i,j] = \begin{bmatrix} m_i & m_{i+1} & ... & m_{i+j} \\ m_{i+1} & m_{i+2} & ... & m_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i+j} & m_{i+j+1} & ... & m_{i+2j} \end{bmatrix},$$

mit den Markov–Parametern m_i.

3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben. Die Aufgabenteile a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

   a) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen hinsichtlich Linearität und Zeitvarianz:

      I)
$$5\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7.5tu$$

      II)
$$\frac{1}{2}\dddot{y} - 10\ddot{y} - \frac{y}{1+t} = \int_0^t \sqrt{2}u(\tau)d\tau + \frac{1}{3}\dot{u}$$

      III)
$$11\ddot{y} - \sin(\pi y) - 3\dot{u} = 0$$

      IV)
$$\cos(\frac{4}{5}\pi)\ddot{y} + 3y = \frac{7}{10}u$$

   b) Gegeben ist das zeitdiskrete Zustandssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

   mit den Systemmatrizen bzw. -vektoren

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Für dieses System wurde ein Regler bestehend aus einem Zustandsregler ($u_k = \mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}}_k + gr_k$) und einem vollständigen Luenberger Beobachter entworfen.

      i. Zeichnen sie das Blockschaltbild des Regelkreises und kennzeichnen Sie die Strecke, den Regler und den Beobachter.

      ii. Geben Sie die Systemmatrizen bzw. -vektoren $\bar{\mathbf{\Phi}}, \bar{\mathbf{\Gamma}}$ und $\bar{\mathbf{c}}$ des geschlossenen Regelkreises bestehend aus Strecke, Regler und Beobachter mit dem Zustand $\mathbf{z} = [\mathbf{x}, \mathbf{e}]$ und dem Eingang r_k allgemein an, wobei $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ den Beobachtungsfehler bezeichnet.

      iii. Die Rückführungsvektoren $\mathbf{k}$ des Zustandsreglers und $\hat{\mathbf{k}}$ des Beobachters wurden bestimmt zu

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & 2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} -\frac{29}{6} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

      Geben Sie die Pole des geschlossenen Regelkreises an.

4. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben. Die Aufgabenteile a) und b) können unabhängig von einander gelöst werden.

   a) Gegeben ist folgende Streckenübertragungsfunktion eines mechanischen Mehrkörpersystems:

   $$G(s) = \frac{300}{(s^2 + s + 15^2)(s^2 + 6s + 9^2)}$$

   Entwerfen Sie für diese Strecke einen Kompensationsregler $R(s)$, der zum einen die Pole der Strecke kompensiert, die den geringeren Dämpfungsgrad besitzen und zum anderen dafür sorgt, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die nachfolgenden Spezifikationen erfüllt: $t_r = 0.5$s, ü$= 25\%$ und $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$.

      i. Der Regler soll *streng proper* (d.h. $grad(z_R(s)) < grad(n_R(s))$ und von minimaler Ordnung sein. Geben Sie die Struktur der Übertragungsfunktion des Reglers $R(s)$ an. Wieviele Entwurfsfreiheitsgrade haben Sie?

      ii. Berechnen Sie die Reglerparameter.
      Hinweis: Benutzen Sie die Näherung $\arctan(\frac{1}{4}) \approx \frac{\pi}{12}$. Der numerische Ausdruck für die Reglerverstärkung muss nicht mehr vereinfacht werden.

      iii. Erklären Sie kurz, ob davon ausgegangen werden kann, dass der so entworfene Regelkreis die Entwurfsvorgaben exakt einhält.

   b) In Abbildung 3 ist das Bode-Diagramm des *offenen* Kreises $L(s) = R(s)G(s)$ eines Regelkreises dargestellt. Die Übertragungsfunktion des Reglers ist bekannt:

   $$R(s) = \frac{1}{10} \frac{\left(1 + \left(\frac{s}{50}\right)\right)}{\left(1 + \left(\frac{s}{1000}\right)\right)}.$$

      i. Zeichnen Sie approximativ das Bode-Diagramm des Reglers in das Diagramm des offenen Kreises in Abbildung 3.

      ii. Bestimmen sie näherungsweise die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Strecke.

      iii. Bestimmen Sie die bleibende Regelabweichung bei Aufschaltung eines Sprunges, $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)}$.

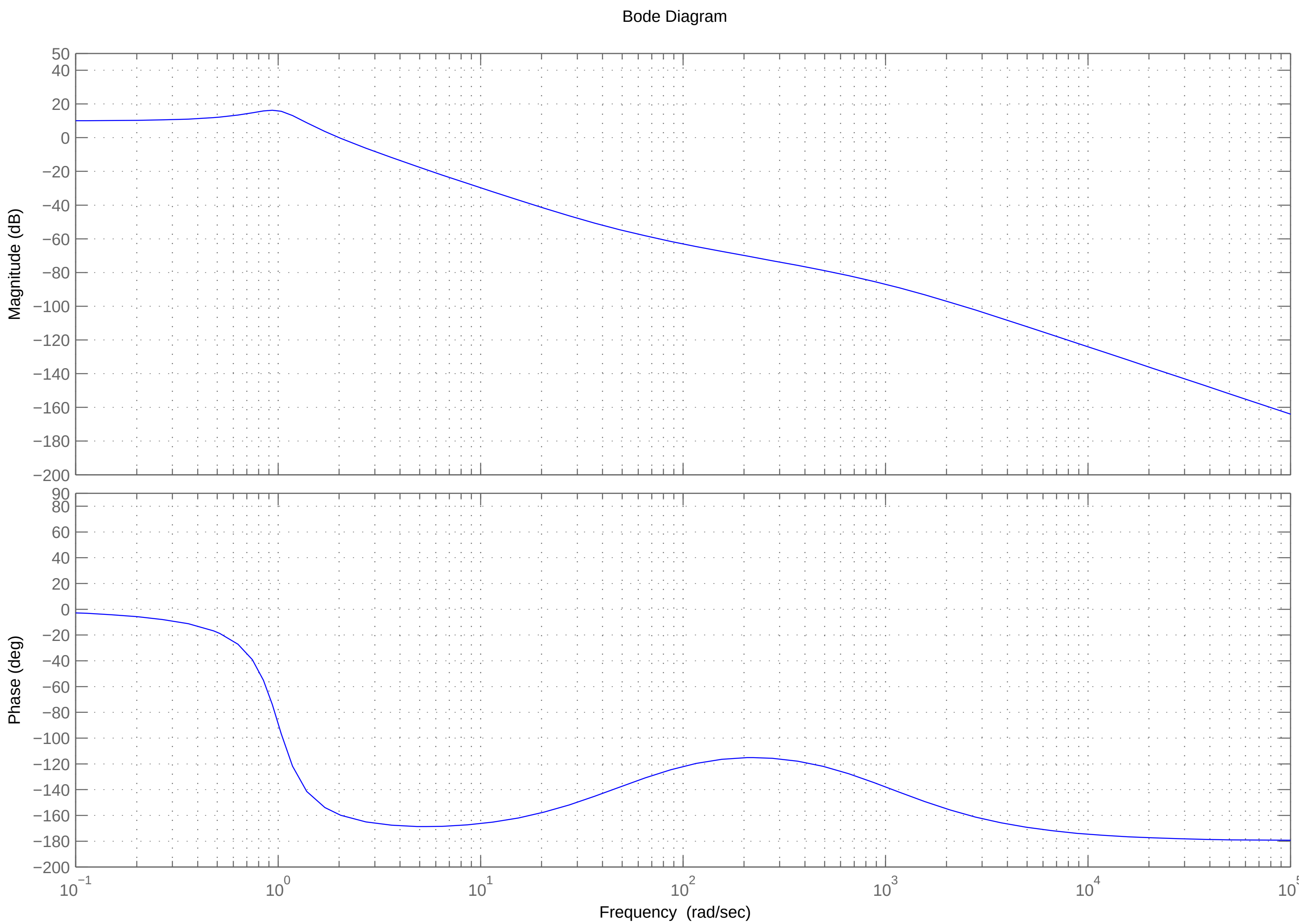

Abbildung 2: Bode-Diagramm des offenen Kreises zu Aufgabe 4 b).