Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierungstechnik
am 07.08.2009

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, nicht auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können

☐ Fr, 14.08.2009 ☐ Mo, 17.08.2009 ☐ Di, 18.08.2009

Viel Erfolg!

1. Die nachfolgende Abbildung zeigt ein ebenes mechanisches System, bei dem ein Balken der Masse m von zwei gegenläufigen Reibrollen im Abstand $2l$ bewegt wird. Die Schwerpunktskoordinate des Balkens sei s. Außerdem wirkt ein viskoser Dämpfer (Dämpfungskonstante d) auf den Balken ein.

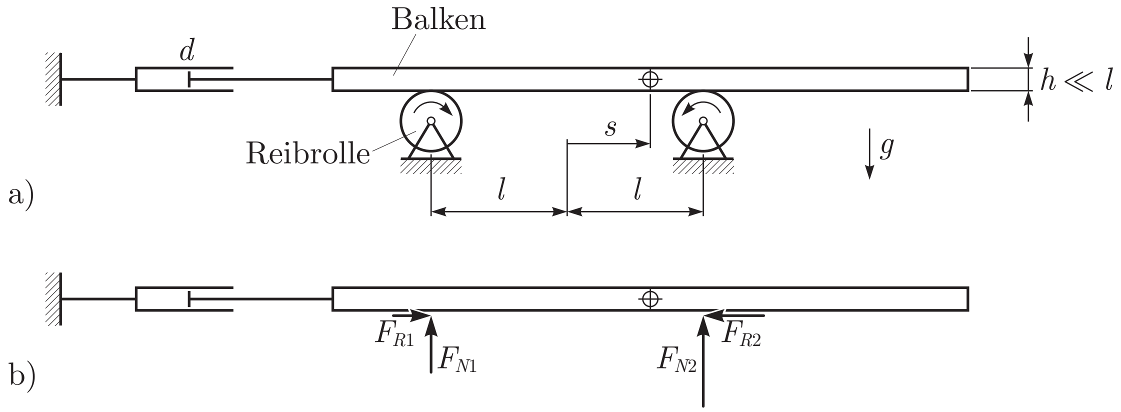


Abbildung 1: Balken auf Reibrollen.

Die fest gelagerten Reibrollen drehen konstant. Ihre Umfangsgeschwindigkeit sei betragsmäßig stets größer als die Geschwindigkeit $w = \dot{s}$ des Balkens, so dass sich die in Abbildung 1.b dargestellten Gleitreibkräfte

$$F_{R1} = \mu F_{N1} \qquad \text{und} \qquad F_{R2} = \mu F_{N2}$$

auf den Balken übertragen. Hier ist μ der konstante Reibkoeffizient. Beachten Sie, dass die Normalkräfte F_{N1} und F_{N2} nicht konstant sind. Die Erdbeschleunigung g wirkt in der dargestellten Richtung.

Die Höhe des Balkens ist vernachlässigbar, d. h. $h \ll l$. Nehmen Sie an, dass der Balken nie von den Rollen hinunterfällt, und dass alle in Abbildung 1 eingezeichneten Kräfte stets positive Werte besitzen.

a) Stellen Sie die Impulsbilanz des Balkens auf und bestimmen Sie daraus das dynamische Modell der Form 7 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Als Zustandsvektor können Sie z. B. $\mathbf{x} = [s, w]^T$ verwenden.

b) Welche und wie viele Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ besitzt dieses System. 1 P.|

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Ruhelage(n) $\mathbf{x}_R$ global asymptotisch stabil ist/sind. 2 P.|

Hinweis: Sollte Ihnen die Lösung der Teilaufgabe a) nicht gelingen, so kann die Teilaufgabe b) auch unabhängig davon bearbeitet werden.

2. Gegeben ist das lineare, zeitdiskrete System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} c_1, c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests Kriterien für die Parameter c_1 und c_2 des Ausgangsvektors so, dass das obige System vollständig beobachtbar ist. 4 P.|

b) Gegeben ist das obige lineare zeitdiskrete System mit dem Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T = [1, 0]$. Berechnen Sie für dieses System den Rückführvektor $\hat{\mathbf{k}}$ eines vollständigen Luenberger-Beobachters mit Hilfe der Formel von Ackermann in der Form, dass die Eigenwerte der zugehörigen Fehlerdynamik bei $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}$ liegen. 4 P.|

c) Gegeben ist ein lineares, zeitdiskretes, vollständig beobachtbares System der Form 2 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k$$
$$y_k = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k + \Delta y_k,$$

wobei Δy_k den Messfehler beschreibt. Für das nominelle System, d.h. für $\Delta y_k = 0$, wird ein vollständiger Luenberger-Beobachter der Form

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \hat{\mathbf{k}}\left(\hat{y}_k - y_k\right)$$
$$\hat{y}_k = \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}_k$$

entworfen. Berechnen Sie die Dynamik des Beobachtungsfehlers $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ und bestimmen Sie anschließend den stationären Beobachtungsfehler zufolge eines konstanten Messfehlers Δy. Nehmen Sie dabei an, dass der Rückführvektor $\hat{\mathbf{k}}$ so gewählt wurde, dass die resultierende Fehlerdynamik stabil ist.

3. a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines linearen, zeitinvarianten, kontinuierlichen Systems anhand deren Pol- und Nullstellendiagramm in Abbildung 2. 3 P.|

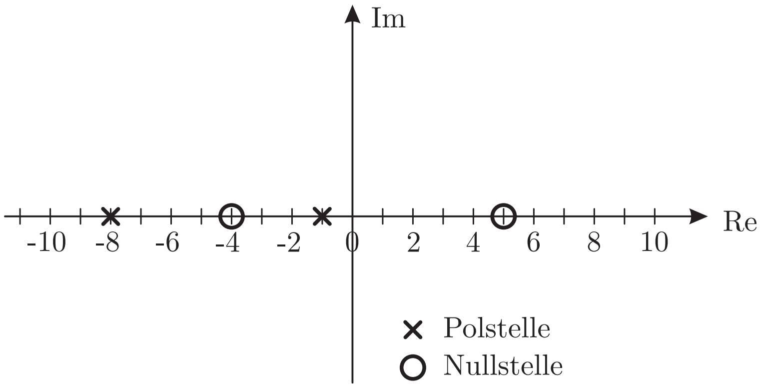


Abbildung 2: Pol- und Nullstellendiagramm.

Geben Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ so an, dass die stationäre Verstärkung V der Übertragungsfunktion $V = 25$ beträgt.

- Ist die Strecke BIBO-stabil?
- Ist die Strecke sprungfähig?
- Ist die Strecke phasenminimal?

b) Skizzieren Sie das Bodediagramm der Übertragungsfunktion 3 P.|

$$G(s) = \frac{-20(s-5)}{(s+10)(s+1)}$$

anhand der Asymptoten auf beiligendem Blatt. Welche der folgenden Übertragungsfunktionen besitzt den gleichen Betragsgang aber einen unterschiedlichen Phasengang?

$$G_1(s) = \frac{20(s+5)}{(s-10)(s-1)}, \qquad G_2(s) = \frac{-20(s-5)}{(s+10)(s+1)} e^{-2s}$$

$$G_3(s) = \frac{20(s-2)(5-s)}{(s+10)(s+1)(s+2)}, \qquad G_4(s) = \frac{20(s/5+1)}{(s/10+1)(s+1)}$$

c) Gegeben ist das System der Form 4 P.|

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-2)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

- Ist dieses System linear?
- Ist dieses System zeitinvariant?

Berechnen Sie für dieses System die zugehörigen s- und z-Übertragungsfunktionen $G(s)$ und $G(z)$. Wählen Sie dazu die Abtastzeit $T_a = 1/10$.

Hinweis: Begründen Sie alle Ihre Antworten ausführlich!

4. a) Gegeben ist die Impulsantwort $(g_k) = (0, 1/2, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ eines linearen, zeitdiskreten, zeitinvarianten Systems. Bestimmen Sie die zur Ausgangsfolge $(y_k) = (0, 1/2, 1, 1/2, 0, 0, 0, \ldots)$ gehörige Eingangsfolge (u_k). Sie können (u_k) wahlweise formal anschreiben oder skizzieren. 2 P.

b) Alle Halte- und Abtastglieder des in Abbildung 3 gezeigten Regelkreises werden synchron und mit einer Abtastzeit von $T_a = 1\,\mathrm{s}$ betrieben. Es handelt sich um ein lineares System, d. h. es gilt das Superpositionsgesetz. 4 P.

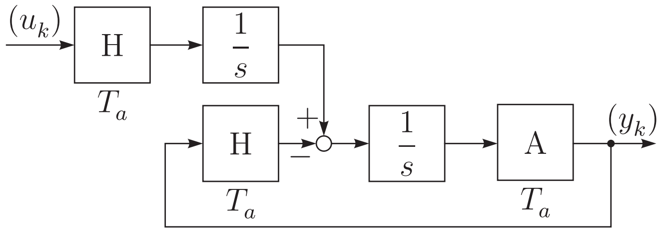


Abbildung 3: Regelkreis.

Bestimmen Sie für diesen Regelkreis die diskrete Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)}.$$

Hinweis: Die Teilaufgaben a) und b) sind unabhängig voneinander zu lösen.

Gehen Sie nun von einem zeitdiskreten LTI-System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k$$

aus, wobei $\mathbf{\Phi}$ **keine** Diagonalmatrix ist. Die Transitionsmatrix des Systems besitzt die Form

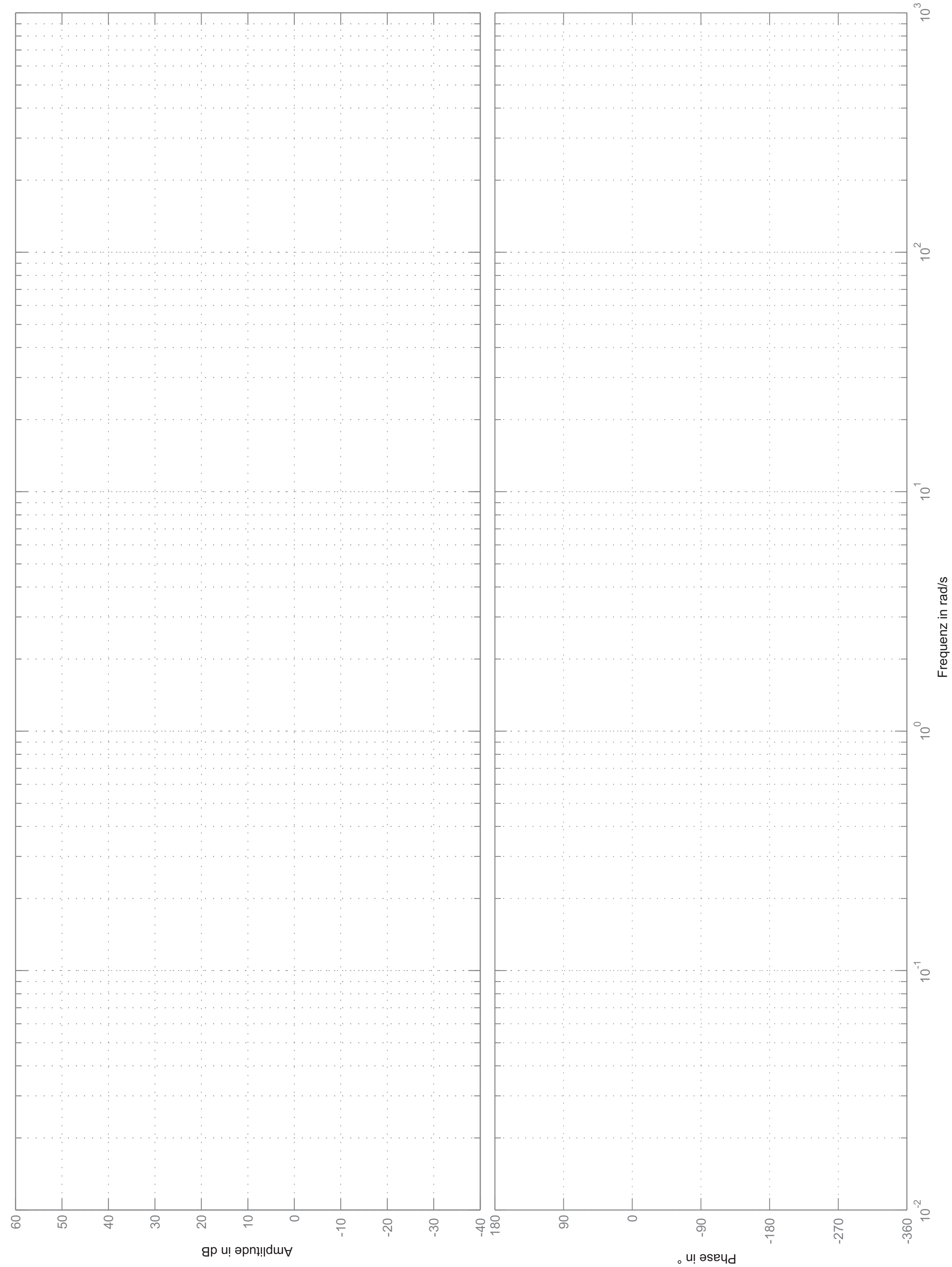
$$\mathbf{\Psi}(k) = \begin{bmatrix} (1/2)^{k-\alpha} & \beta^{k-1} - \gamma \\ \varepsilon & \phi \end{bmatrix}$$

mit den konstanten Parametern α, β, γ, ε, $\phi \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie Parameter α, β, γ, ε, ϕ. Sie können dazu die Eigenschaften der Transitionsmatrix benützen. 3 P.

d) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}$. 1 P.

Hinweis: Die Teilaufgaben c) und d) sind unabhängig von a) und b).



Amplitude in dB
60 50 40 30 20 10 0 -10 -20 -30 -40
Phase in °
180 90 0 -90 -180 -270 -360
Frequenz in rad/s
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3}