Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierungstechnik
am 05.02.2010

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	11	9	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, nicht auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können

☐ Do, 11.02.10 ☐ Mo, 15.02.10

Viel Erfolg!

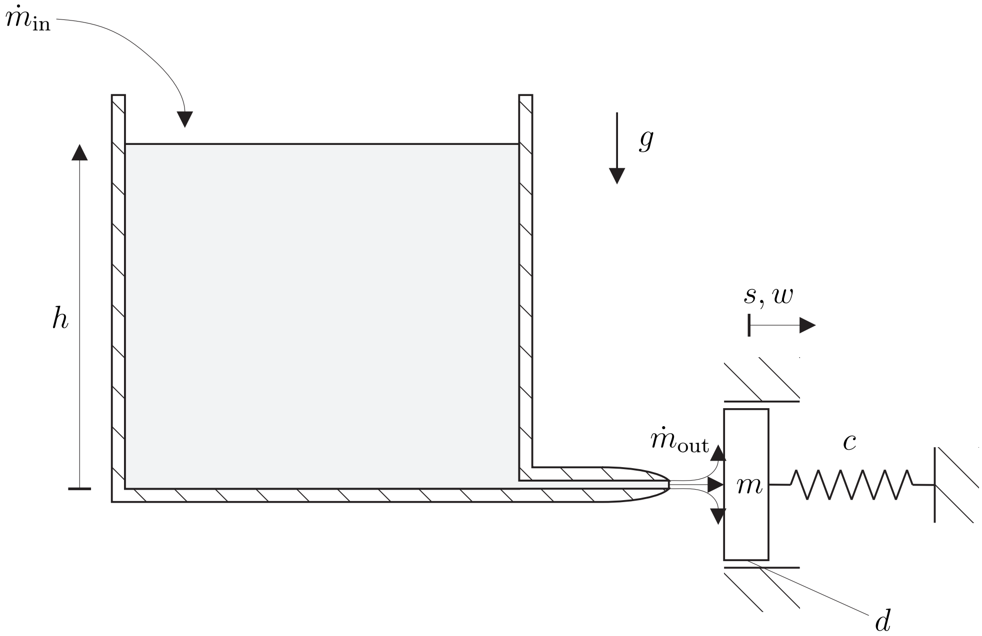


Abbildung 1: Prinzipskizze des Aufbaus.

1. Gegeben ist ein Wassertank der Querschnittsfläche A, der über einen Massenzustrom $\dot{m}_{\text{in}}$ versorgt wird und an dessen Boden ein Auslauf über eine Düse mit der Querschnittsfläche A_D realisiert ist, siehe Abbildung 1. Der mit der Auslaufgeschwindigkeit $w_{\text{out}} = \frac{\dot{m}_{\text{out}}}{\rho A_D}$ ausströmende Wasserstrahl mit der Dichte ρ trifft auf eine Platte der Masse m und wird dort um 90° abgelenkt. Die Platte selbst ist über eine lineare Feder mit der Federkonstanten c an das Inertialsystem gekoppelt. Die Ruhelage der Feder sei bei $s = 0$ gegeben. Des Weiteren tritt zwischen der Platte und deren Lagerung eine zur Geschwindigkeit w proportionale Reibung mit dem Koeffizienten d auf. Außerdem wird angenommen, dass der Abstand Düse-Platte klein ist, sodass die auf den Wasserstrahl wirkende Gravitation vernachlässigbar ist. Der Zusammenhang zwischen ausströmenden Massenstrom $\dot{m}_{\text{out}}$ und der Füllstandshöhe $h > 0$ ist über

$$\dot{m}_{\text{out}} = \rho A_D \sqrt{2gh}$$

gegeben, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet.

   a) Bestimmen Sie aus der zeitlichen Änderung des Impulses des Wasserstrahls $p = m_{\text{out}} w_{\text{out}}$ die Kraft als Funktion der Füllstandshöhe h, die der Wasserstrahl auf die Platte ausübt. Aufgrund der hohen Dynamik des Strömungsfeldes lässt sich die zeitliche Änderung der Ausflussgeschwindigkeit w_{out} vernachlässigen. 1.5 P.|

   b) Geben Sie das Gesamtmodell des Systems in der nichtlinearen Zustandsdarstellung 3 P.|

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x_0} \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

an. Wählen Sie hierbei den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [h, s, w]^T$, den Eingang $u = \dot{m}_{\text{in}}$ und den Ausgang $y = s$.

c) Berechnen Sie die Ruhelage des Systems für einen konstanten einströmenden Massenstrom $\dot{m}_{\text{in},R}$ und linearisieren Sie das System um diese Ruhelage. 5.5 P.|

2. a) Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches autonomes System der Form 3 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Transitionsmatrix des Systems.

b) Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem der Form 4.5 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

mit der Abtastzeit $T_a = 2\mathrm{s}$.

i. Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion für das angegebene Abtastsystem.

ii. Bestimmen Sie mit Hilfe der z-Übertragungsfunktion und der Näherung $\tan(\frac{1}{10}\pi) \approx \frac{1}{3}$ die eingeschwungene Lösung zur Eingangsfolge

$$(u_k) = \left(\sqrt{10} \cdot 1^k + \frac{5}{2} \cos(\frac{\pi}{4} T_a k + \frac{\pi}{10}) \right).$$

iii. Lässt sich die Ausgangsfolge (y_k) eindeutig einer Trägerschwingung zuordnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gegeben ist die Impulsantwort $(g_k) = (0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ eines linearen, zeitinvarianten Abtastsystems mit $n = 2$ Zuständen. 2.5 P.|

i. Bestimmen Sie die zur Eingangsfolge $(u_k) = (1, 2, -3, 0, 0, 0, \ldots)$ zugehörige Ausgangsfolge (y_k).

ii. Prüfen Sie das System auf BIBO-Stabilität, Erreichbarkeit sowie Beobachtbarkeit.

3. Gegeben ist ein Standardregelkreis wie er in Abbildung 2 dargestellt ist. Die zu regelnde

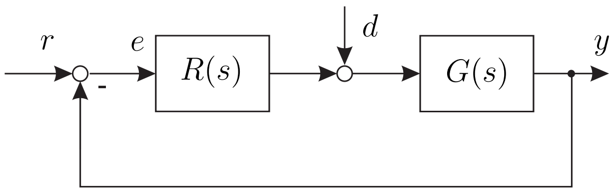


Abbildung 2: Standardregelkreis

Strecke wird durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{3s\left(s + \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)}$$

beschrieben, und der geschlossene Regelkreis soll die folgenden Anforderungen erfüllen:

- Anstiegszeit: $t_r = 1.5$ s
- Überschwingen: $\ddot{u} = 10\%$
- bleibende Regelabweichung auf eine sprungförmige Störung: $e_\infty|_{d(t)=\sigma(t)} = 0$.

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben (Aufgabenteil d) kann unabhängig von den anderen Aufgabenteilen bearbeitet werden):

a) Zeichnen Sie das Bodediagramm der Übertragungsfunktion $G(s)$. Benutzen Sie dazu die beiliegende Vorlage und verwenden Sie (ausschließlich zum Zeichnen) die Näherung $\sqrt{3} \approx 1.7$. 2 P.|

b) Mit genau einem der folgenden Regler 4.5 P.|

$$\begin{aligned}
\text{Regler 1:}\quad & R(s) = V \\
\text{Regler 2:}\quad & R(s) = \frac{V}{1+sT} \\
\text{Regler 3:}\quad & R(s) = \frac{V}{s}(1+sT)
\end{aligned}$$

ist in Kombination mit der obigen Strecke $G(s)$ die Erfüllung der genannten Anforderungen möglich. Begründen Sie für jeden einzelnen Regler, warum mit diesem die Anforderungen erfüllt bzw. nicht erfüllt werden können. Nutzen Sie für Ihre Argumentation gegebenenfalls die Durchtrittsfrequenz ω_C, die Phasenreserve Φ sowie den Endwertsatz der Laplace-Transformation.

c) Berechnen Sie die Parameter des ausgewählten Reglers, sodass die Anforderungen erfüllt werden. 3 P.|

d) Abbildung 3 zeigt die Ortskurve des offenen Kreises $L(s) = R(s)G(s)$ mit dem in der vorigen Teilaufgabe entworfenen Regler. Machen Sie in der Abbildung die Frequenzen $\omega = 0, \omega_C, \infty$ sowie die Phasenreserve Φ kenntlich. 1.5 P.|

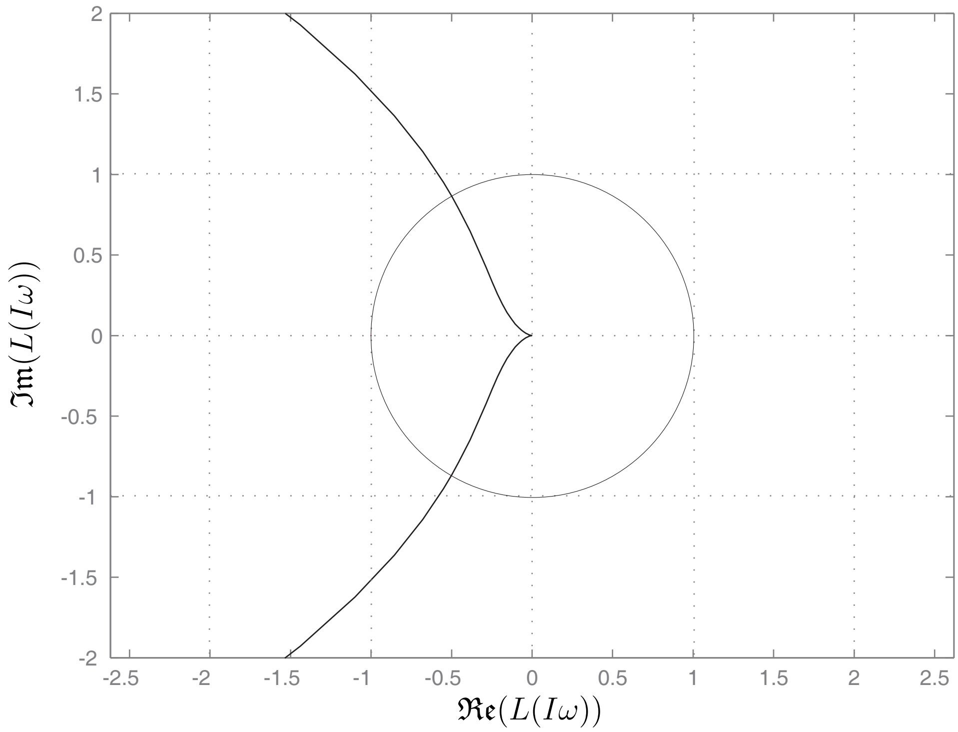


Abbildung 3: Ortskurve des offenen Kreises

4. Gegeben ist das lineare und zeitinvariante Mehrgrößensystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Erreichbarkeitsmatrix, dass dieses System vollständig erreichbar ist. 1 P.|

b) Entwerfen Sie für das Systen einen Dead-Beat-Zustandsregler $\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k$ 3 P.|
Hinweis: Beachten Sie die besondere Struktur des Systems.

c) Nach maximal wie vielen Schritten ist das System in der Ruhelage? 1 P.|

d) Für ein lineares und zeitinvariantes Eingrößensystem 4 P.|

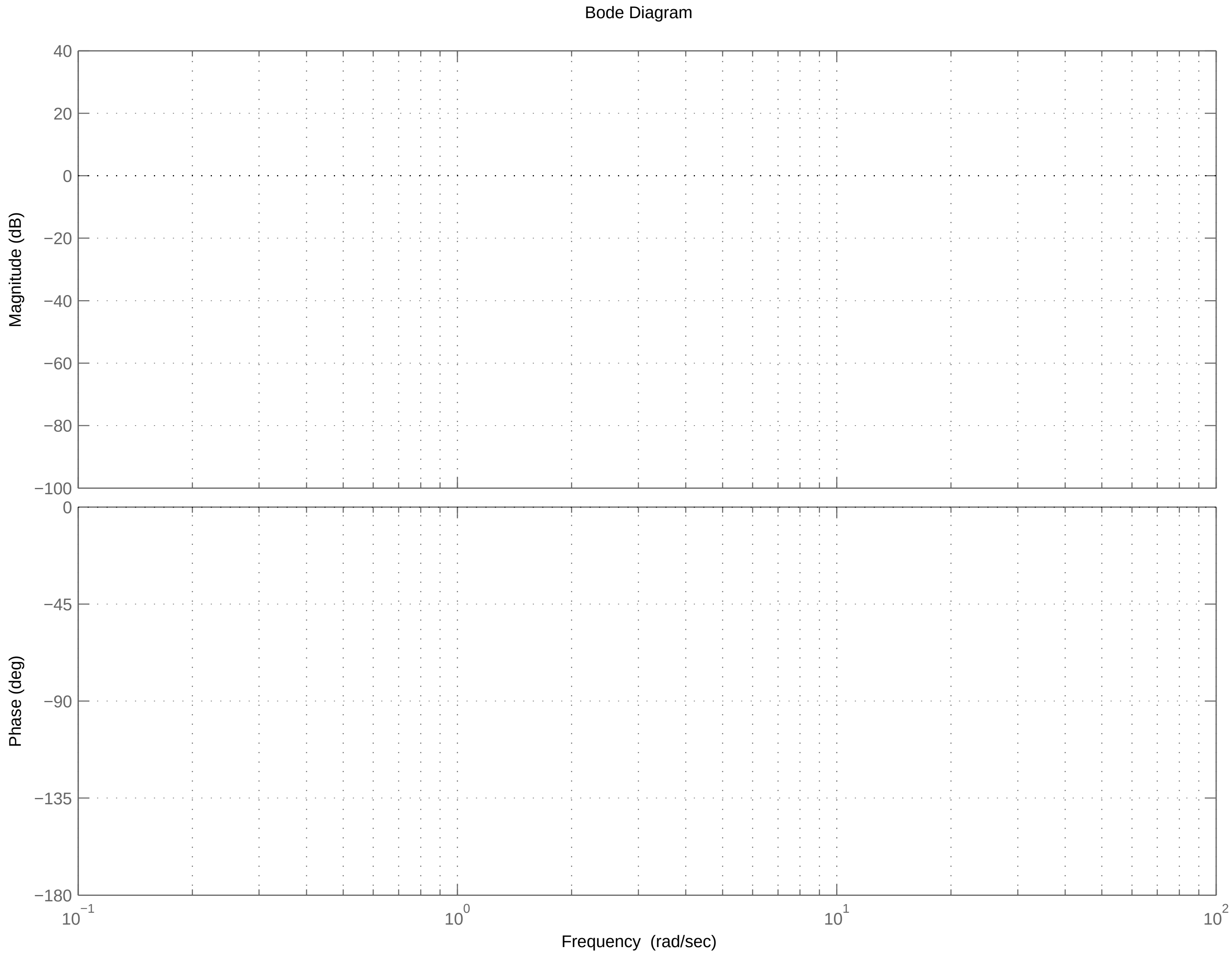
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

wurden ein vollständiger Zustandsbeobachter

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma} u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k) \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned}$$

und ein Zustandsregler $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + g r_k$ entworfen.

- Zeichnen Sie ein Blockdiagramm des Systems mit Zustandsbeobachter und Zustandsregler und kennzeichnen Sie die jeweiligen Komponenten.
- Geben Sie das Differenzengleichungssystem des geschlossenen Kreises bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter für den Zustand $\left[\mathbf{x}_k^T, \quad \mathbf{e}_k^T\right]^T$ mit $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ an und leiten Sie daraus das Separationstheorem ab.


Bode Diagram
Magnitude (dB)
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
Phase (deg)
0
−45
−90
−135
−180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)