Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 04.03.2011

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Fr., 11.03.2011 ☐ Mo., 14.03.2011 ☐ Di., 15.03.2011 ☐ Mi., 16.03.2011

Viel Erfolg!

1. Im Folgenden wird die Regelung einer Heizungsanlage mit zwei voneinander getrennten Fluidkreisläufen betrachtet, siehe Abbildung 1. Vereinfachend wird angenommen, dass jede Kammer des Wärmetauschers sowie der Heizkörper Fluid der konstanten Masse m mit der spezifischen Wärmekapazität c enthalten, die Temperaturen ideal durchmischt und die Leitungen ideal isoliert sind. Kreislauf I wird mit einer konstanten Vorlauftemperatur T_v versorgt und besitzt den Massenstrom $\dot{m}_I$, der mit Hilfe einer Pumpe beliebig vorgegeben werden kann. Im Kreislauf II mit dem konstanten Massenstrom $\dot{m}_{II}$ ist ein Heizkörper mit der Fluidtemperatur T_h angebracht, der Wärme in Form von Strahlung an die Umgebung abgibt. Der zugehörige Wärmestrom berechnet sich über $\dot{Q}_s = \sigma\left(T_h^4 - T_u^4\right)$ mit der Konstanten $\sigma > 0$, wobei T_u die Umgebungstemperatur bezeichnet. Zwischen den beiden Kammern des zur Umgebung als ideal isolierend angenommenen Wärmetauschers mit den Fluidtemperaturen T_I bzw. T_{II} wird der Wärmestrom $\dot{Q}_k = \alpha\left(T_I - T_{II}\right)$ mit der Konstanten $\alpha > 0$ ausgetauscht.

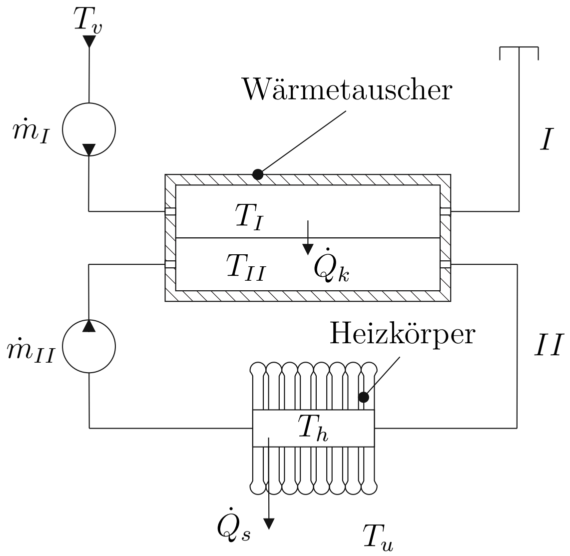

Abbildung 1: Prinzipskizze zur Aufgabe 1.

a) Berechnen Sie das mathematische Modell der Heizungsanlage der Form 5 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, d)$$
$$y = g(\mathbf{x}, u, d).$$

Wählen Sie dazu die Zustandsgrößen $\mathbf{x} = \left[T_I, T_{II}, T_h\right]^T$, die Eingangsgröße $u = \dot{m}_I$, die Störgröße $d = T_u$ sowie die Ausgangsgröße $y = T_h$.
Hinweis: Nutzen Sie dazu den ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{U} = \left(\dot{H}_{\text{zu}} - \dot{H}_{\text{ab}}\right) + \left(\dot{Q}_{\text{zu}} - \dot{Q}_{\text{ab}}\right),$$

der die zeitliche Änderung der inneren Energie

$$U = mcT$$

in Bezug zu den zu- bzw. abgeführten Enthalpieströmen

$$\dot{H}_{\text{zu}} = \dot{m}_{\text{zu}} c T_{\text{zu}} \quad \text{und} \quad \dot{H}_{\text{ab}} = \dot{m}_{\text{ab}} c T_{\text{ab}}$$

und den zu- bzw. abgeführten Wärmeströmen $\dot{Q}_{\text{zu}}, \dot{Q}_{\text{ab}}$ setzt.

b) Bestimmen Sie für $T_{h,R} = 2T_{u,R}$ die Ruhelage $(\mathbf{x}_R, u_R, d_R)$ des Systems. 1.5 P.|

c) Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, u_R, d_R)$ und geben Sie es in der Form 3.5 P.|

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u + \mathbf{v}\Delta d\\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x}\end{aligned}$$

an.

2. Gegeben ist das Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1a}$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{1b}$$

a) Prüfen Sie das System (1) auf asymptotische Stabilität. 2 P.|

b) Welche Eigenschaft muss das System (1) besitzen, damit ein Zustandsreglerentwurf möglich ist? Wie ist diese Eigenschaft definiert? 1 P.|

c) Bestimmen Sie den Rückführvektor eines Zustandsreglers $\mathbf{k}^T = [k_1, k_2, k_3]$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ zu liegen kommen. 2 P.|
Hinweis: Beachten Sie die spezielle Form in der das System vorliegt. Es muss keine 3×3-Matrix invertiert werden.

Nehmen Sie im Weiteren an, dass lediglich der erste Zustand des Systems (1) gemessen werden kann. Damit muss das System um einen vollständigen Zustandsbeobachter erweitert werden, um eine Zustandsregelung implementieren zu können.

d) Geben Sie das neue System an und prüfen Sie es auf vollständige Beobachtbarkeit. 1 P.|

e) Geben Sie einen vollständigen Luenbergerbeobachter an und bestimmen Sie den Rückführvektor $\hat{\mathbf{k}}$ so, dass das Beobachterfehlersystem Dead-Beat Verhalten aufweist. 3 P.|

f) In wievielen Schritten klingt der Beobachtungsfehler zu Null ab? Welche Auswirkungen hat die um den Beobachter erweiterte Regelung auf die Eigenwerte des geschlossenen Kreises? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

3. Gegeben ist der Regelkreis gemäß Abbildung 2 mit der Führungsgröße r sowie der Störung d.

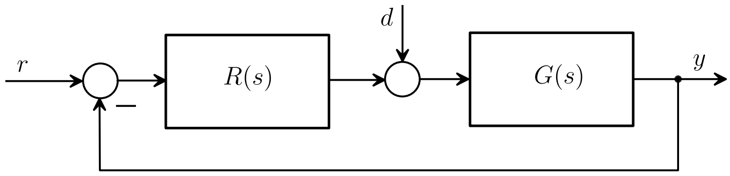

Abbildung 2: Regelkreis.

a) Das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ist in Abbildung 3 gegeben. Zeichnen Sie die zugehörige Nyquist-Ortskurve in die Vorlage Abbildung 4. Kennzeichnen Sie den Durchlaufsinn sowie die Punkte $\omega = \pm\infty$ und $\omega = \pm 0$. 3 P.

Hinweis: Achten Sie auf eine qualitativ richtige Darstellung der wesentlichen Einzelheiten. Die genauen Zahlenwerte spielen nur eine untergeordnete Rolle.

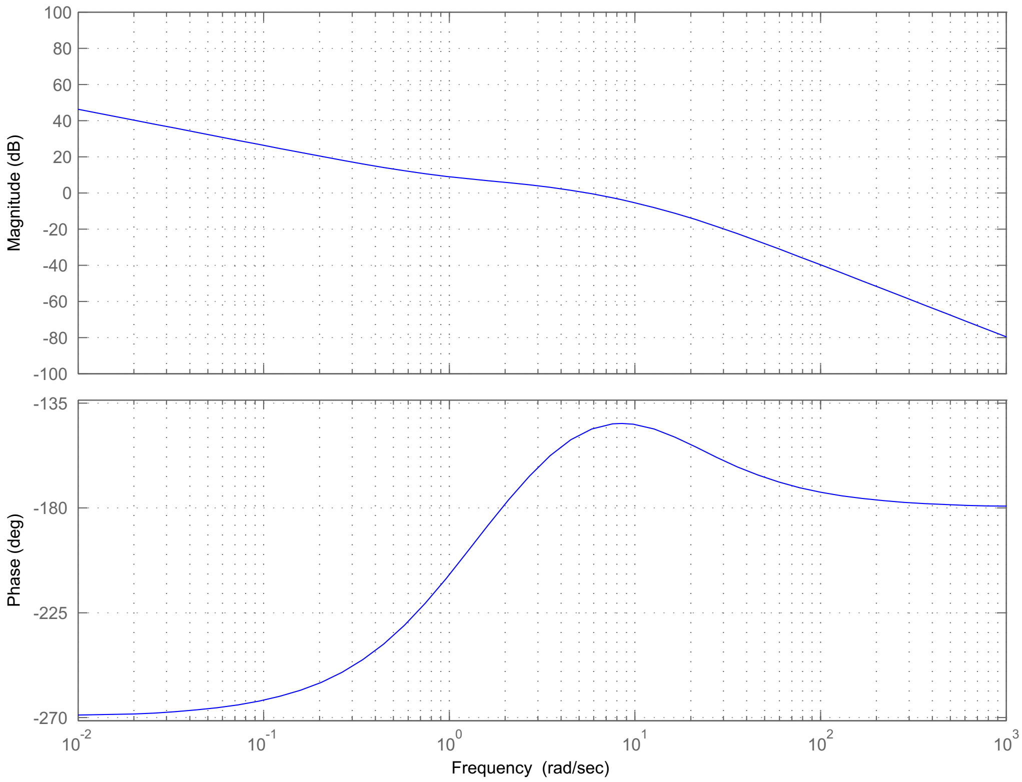

Abbildung 3: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises.

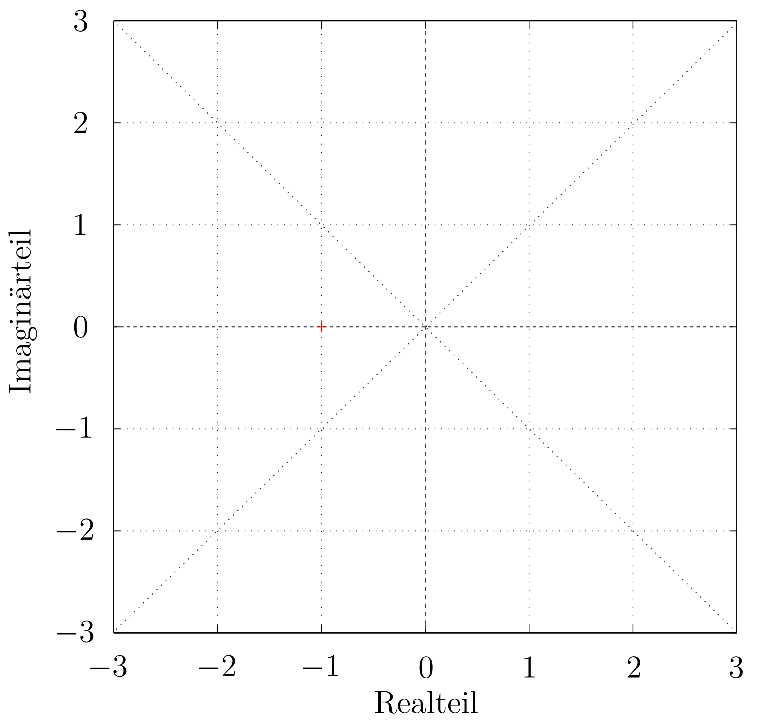

Abbildung 4: Vorlage für das Zeichnen der Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises.

Für die folgenden Unterpunkte soll anders als im Unterpunkt a) die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s+2)(s-3)^2},$$

mit dem Regler

$$R(s) = \frac{16\,(s^2+2s+1)}{\left(\frac{s^2}{12}+s+1\right)} \tag{2}$$

betrachtet werden.

b) Überprüfen Sie die BIBO-Stabilität der Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}$. Verwenden Sie dazu das Nyquist-Kriterium mit der in Abbildung 5 gegebenen Ortskurve des offenen Regelkreises. 2 P.|

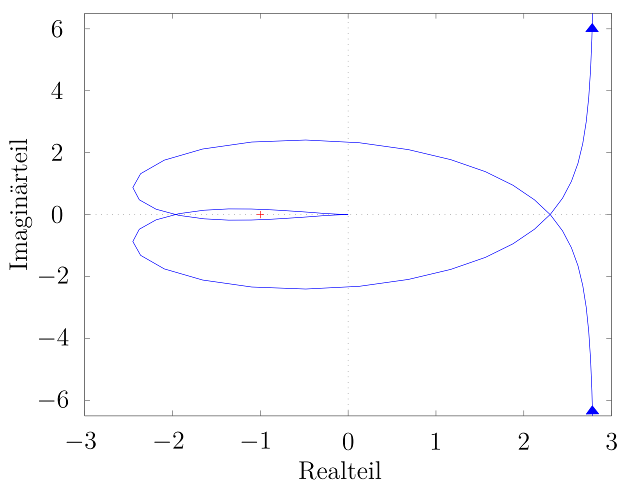

Abbildung 5: Ortskurve des offenen Regelkreises.

c) Untersuchen Sie, ob der geschlossene Regelkreis intern stabil ist. Bitte begründen Sie Ihre Antwort ausführlich. 2 P.|

d) Können Sie im vorliegenden Fall das Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung anwenden? 1 P.|

e) Ist der Regler $R(s)$ gemäß Gleichung (2) 2 P.|

- BIBO-stabil?
- realisierbar?
- sprungfähig?

Wie groß ist der Verstärkungsfaktor von $R(s)$?

Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

4. Bearbeiten Sie die nachfolgenden voneinander unabhängigen Aufgabenstellungen.

a) Abbildung 6 zeigt die Sprungantwort eines linearen zeitinvarianten Systems. 3 P.|

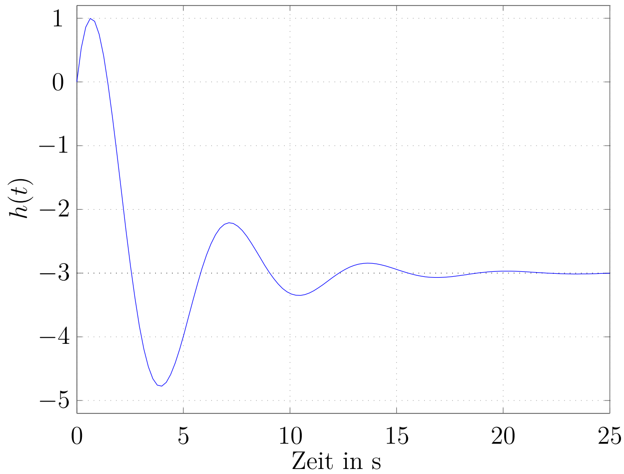

Abbildung 6: Sprungantwort $h(t)$ eines linearen zeitinvarianten Systems.

Bestimmen Sie aus den gegebenen Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, 4$, die zu der Sprungantwort gemäß Abbildung 6 passende und berechnen Sie weiters die Konstante $c > 0$. Achten Sie auf eine ausreichende Begründung Ihrer Antworten.

$$G_1(s) = c\frac{s-1}{s^2+4s+1} \qquad G_2(s) = c\frac{s-1}{s^2+0.5s+1}$$

$$G_3(s) = c\frac{s+1}{s^2+0.5s+1} \qquad G_4(s) = c\frac{s^2-\frac{8}{3}s-1}{s^2+0.5s+1}$$

b) Die Transitionsmatrix eines linearen zeitkontinuierlichen zeitinvarianten Systems lautet 3 P.|

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-8\,t} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{7\,t} & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{7\,t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-8\,t} \\ \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{7\,t} - \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-8\,t} & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-8\,t} + \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{7\,t} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte?

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften der Transitionsmatrix.

c) Wie groß ist die stetige Winkeländerung des Polynoms 1 P.|

$$p(s) = s^2 + 10s + 4 \quad ?$$

d) Bestimmen Sie die Wertebereiche der reellen Parameter α und β so, dass das System 1 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} u$$

für $u_R \neq 0$ mindestens eine Ruhelage besitzt.

e) Von einem linearen zeitinvarianten zeitkontinuierlichen System ist bekannt, dass die Sprungantwort beschränkt ist. Folgt daraus die BIBO-Stabilität des Systems? Begründen Sie Ihre Antwort. 2 P.|