Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 08.07.2011

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

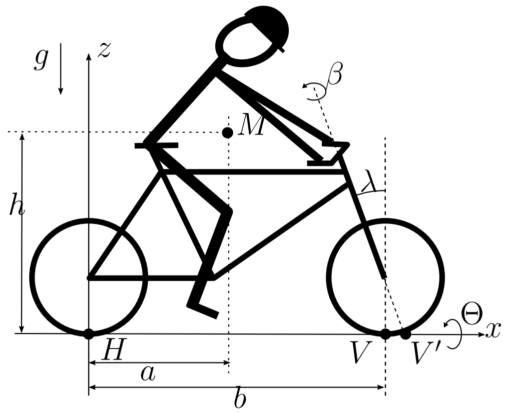
... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

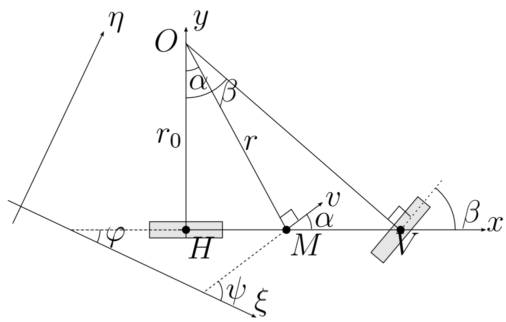
☐ Fr., 15.07.2011 ☐ Mo., 18.07.2011

Viel Erfolg!

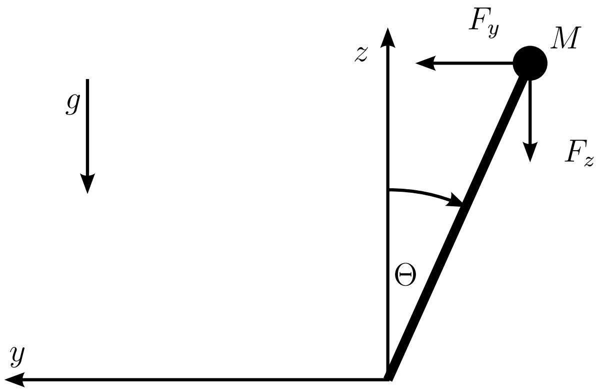
1. Abbildung 1 zeigt ein Modell, mit dessen Hilfe die Kippbewegung eines Fahrrades um die x-Achse (Kippwinkel Θ) dargestellt werden kann. Die gyroskopischen Kräfte, die auf der Kreiselbewegung der Räder beruhen, werden als vernachlässigbar klein angenommen. Der Steuerkopfwinkel λ wird als Null angenommen, so dass die Punkte V und V' zusammenfallen. Der Abstand des Massenschwerpunktes M zur x-Achse betrage h, der Abstand zur z-Achse sei mit a gegeben. Dabei befindet sich der Ursprung des mitbewegten Koordinatensystems xyz im Auflagepunkt H des Hinterrades.



(a) Fahrrad.



(b) Draufsicht für $\lambda = 0°$ und $\Theta = 0°$.



(c) Ersatzsystem des Fahrrades als inverses Pendel (yz-Ebene).

Abbildung 1: Prinzipskizzen der Fahrradgeometrie.

Nehmen Sie für die Modellierung ein Ersatzsystem nach Abbildung 1c an, bei dem die in y-Richtung wirkende Kraft zu $F_y = -m\left(\frac{av_0}{b}\frac{1}{\cos^2\beta}\dot{\beta} + \frac{v_0^2}{b}\tan\beta\right)$ gegeben ist. In z-Richtung wirkt die Gewichtskraft. Dabei bezeichnet m die Masse des Fahrrades mit Fahrer, b den Radstand, $v_0 > 0$ die Geschwindigkeit des Rades in x-Richtung und $\beta(t)$ den Lenkwinkel. Das Trägheitsmoment von Rad und Fahrer für eine Drehung um die x-Achse sei mit J_p gegeben. Es wird angenommen, dass auf die Lenkung mit dem Trägheitsmoment J_l und dem Lenkwinkel $\beta(t)$ das Lenkmoment $M_\mathrm{l}(t)$ wirkt. Berücksichtigen Sie dabei eine auf die Lenkung wirkende viskose Dämpfung mit der Dämpfungskonstanten d_l.

a) Geben Sie die Modellgleichungen des nichtlinearen Systems in der Form 4 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$
$$y = g(\mathbf{x}, u)$$

an. Wählen Sie dabei den Zustand $\mathbf{x} = \left[\Theta, \dot{\Theta}, \beta, \dot{\beta}\right]$, den Eingang $u = M_l$ und den Ausgang $y = \Theta$.

b) Bestimmen Sie allgemein die Ruhelage $(\mathbf{x}_R, u_R)$ des Systems. Welche Bahnkurven des Fahrrades sind demnach ohne Änderung des Lenkwinkels möglich und wie muss das Fahrrad hierzu jeweils gekippt sein? 3 P.|

c) Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, u_R)$ und geben Sie es in der Form 3 P.|

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} \end{aligned}$$

an.

Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$

2. Bearbeiten Sie die nachfolgenden voneinander unabhängigen Aufgabenstellungen: 5 P.|

   a) Gegeben ist das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1/T_1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/T_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

      i. Definieren Sie die Erreichbarkeit eines Systems und zeigen Sie, dass das System vollständig erreichbar ist.

      ii. Entwerfen Sie mithilfe der Polvorgabe $\lambda = -0.3 \pm I0.3$ für $T_1 = 2$ einen Zustandsregler für das System mit der Rückführung $u = \mathbf{k}^T\mathbf{x} + gr$. Geben Sie den Rückführvektor $\mathbf{k} = [k_1, k_2]^T$ an.

   b) Gegeben ist das nachfolgende System. Ist das System vollständig beobachtbar? 1.5 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

   c) Gegeben ist die Übertragungsfunktion 3.5 P.|

$$G(s) = \frac{s}{s + \ln(2)}.$$

      i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$.

      ii. Was lässt sich bei Verwendung der Tustin-Transformation vom z-Bereich in den q-Bereich über die Anzahl der Pole und Nullstellen sagen?

3. Gegeben ist die Strecke

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{100} + \frac{s}{10}} \ .$$

a) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm der Streckenübertragungsfunktion anhand der Asymptoten. Verwenden Sie dafür die beiliegende Vorlage. 2 P.|

b) Entwerfen Sie für die Strecke $G(s)$ mit dem Frequenzkennlinienverfahren einen Regler $R(s)$ mit dem der geschlossene Regelkreis folgende Spezifikationen erfüllt: 3 P.|

- Anstiegszeit $t_r = 0.15\,\mathrm{s}$
- Prozentuelles Überschwingen $\ddot{u} = 25\%$
- Bleibende Regelabweichung $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

i. Geben Sie die Anforderungen an den offenen Kreis an.

ii. Welches Übertragungsglied benötigen Sie für den Regler, um diesen Anforderungen gerecht zu werden? Berechnen Sie die Reglerkoeffizienten.

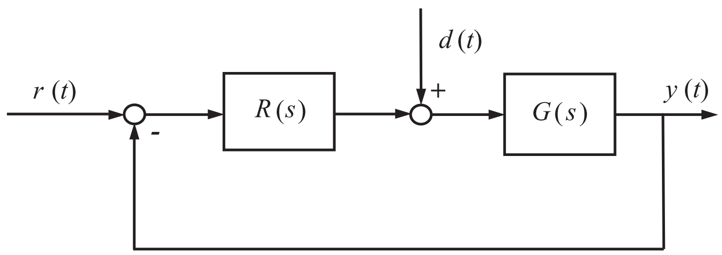


Abbildung 2: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

c) Auf den Eingang der Strecke aus Abbildung 2 wirkt eine Störung der Form 3 P.|

$$d(t) = 0.25\sigma(t) + 0.5\sin(5t)\,.$$

Bestimmen Sie die eingeschwungene Lösung des Ausgangs $y(t)$ für $r(t) = 0$ mit der gegebenen Strecke $G(s)$ und dem berechneten Regler $R(s)$ aus Aufgabe b). *Hinweis:* Die numerischen Endergebnisse müssen NICHT explizit berechnet werden!

d) Der Regler 2 P.|

$$R(s) = \frac{s-1}{s}$$

und die Strecke

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+s-2}$$

werden in einem einfachen Regelkreis nach Abbildung 2 verwendet.

i. Ist die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}$ des geschlossenen Regelkreises BIBO-stabil?

ii. Ist der geschlossene Regelkreis intern stabil?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

4. Bearbeiten Sie die nachfolgenden voneinander unabhängigen Aufgabenstellungen.

   a) Asymptotische Stabilität 5 P.|

      i. Wie ist asymptotische Stabilität definiert?

      ii. Die Impulsantwort eines Systems mit den Parametern a und ω_0 laute

$$y(t) = e^{-at}cos(w_0 t)$$

      Für welche Werte von a und ω_0 ist das System stabil, für welche instabil?

      iii. Gegeben ist eine PT_2-Strecke mit I-Regler. Nachfolgend ist die Gleichung für den geschlossenen Kreis dargestellt.

$$T_{r,y}(s) = \frac{K_0}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K_0}$$

      T_1 und T_2 der Verzögerungsglieder seien bekannt und größer als 0. Bestimmen Sie nach Hurwitz den Wertebereich von K_0, für welchen der Regelkreis asymptotisch stabil ist.

   b) Gegeben ist ein zeitdiskretes LTI-System 2 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k.$$

   Die Transitionsmatrix des Systems hat die Form

$$\mathbf{\Psi}(k) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{c}\right)^k & d^{k-1} - 1 \\ a - 0.5 & b^{3k-3} \end{bmatrix}.$$

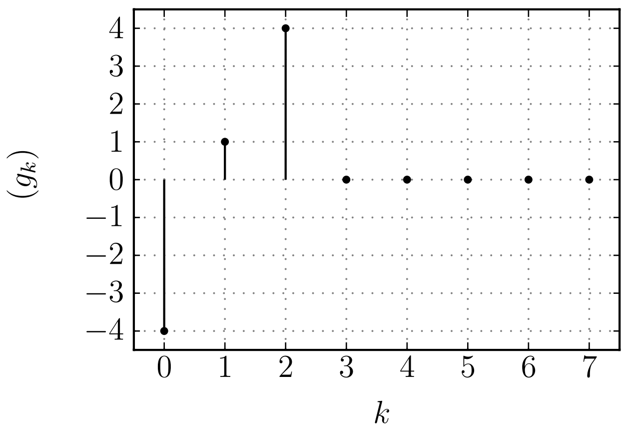
      i. Wie lauten die Eigenschaften der Transitionsmatrix?

      ii. Bestimmen Sie die konstanten Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass Sie als Dynamikmatrix des Systems die Matrix

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

      erhalten.

   c) Die folgende Abbildung zeigt die Impulsantwortfolge (g_k) eines linearen zeitinvarianten Abtastsystems. 3 P.|



i. Bestimmen Sie aus den gegebenen Übertragungsfunktionen $G_i(z)$, $i = 1, \dots, 4$, die zu der dargestellten Impulsantwortfolge passende. Begründen Sie für jede der drei verbliebenen Übertragungsfunktionen, warum diese nicht zu der Impulsantwortfolge passen.

$$G_1(z) = \frac{-2z^3 + 4z^2 + z + 4}{(z-1)^3} \qquad G_2(z) = \frac{-2z^3 + 4z^2 + z + 4}{z^3}$$

$$G_3(z) = \frac{-4z^2 + z + 4}{z^2} \qquad G_4(z) = \frac{-4z^2 + z + 4}{z^3}$$

ii. Geben Sie den Grenzwert $\lim_{k\to\infty}(y_k)$ der Ausgangsfolge des Systems auf Anregung mit einem Einheitssprung $(u_k) = (1, 1, 1, 1, \dots)$ an, falls dieser existiert.

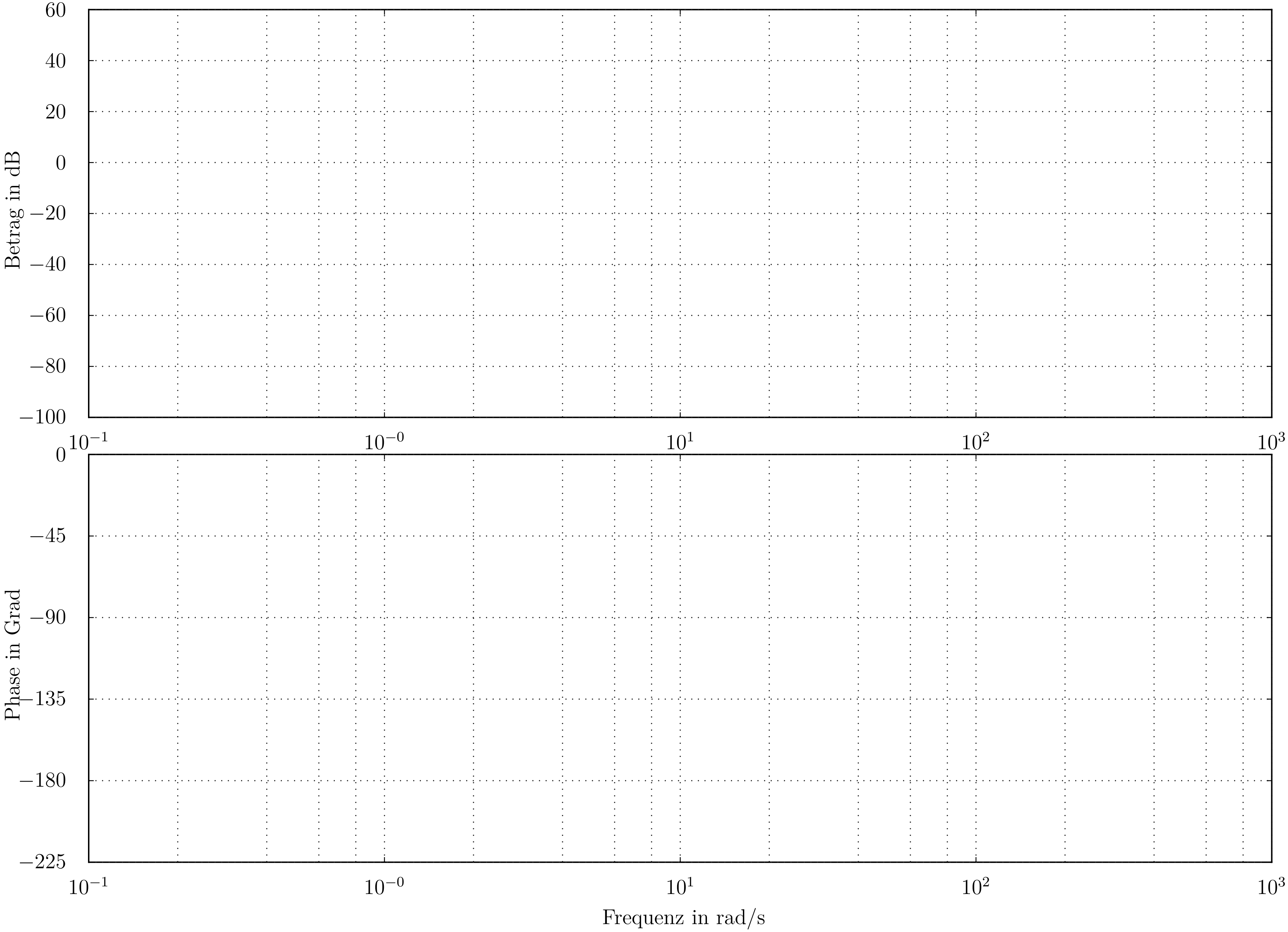


Abbildung 3: Vorlage Bode-Diagramm zu Aufgabe 3