

**Technische Universität Wien**  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Automatisierung  
am 07.10.2011

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und
- ... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

Fr., 14.10.2011

Mo., 17.10.2011

Di., 18.10.2011

**Viel Erfolg!**

1. In einer abgeschlossenen Kammer befindet sich Gas mit einer Masse  $m$ , siehe Abbildung 1a. Die Kammer wird durch eine Wand mit der Dicke  $d_w$  isoliert, an der Innenseite der Wand ( $z = 0$ ) herrscht die Temperatur  $T_{wi}(t)$  und an der Außenseite ( $z = d_w$ ) die konstante Temperatur  $T_{wo}$ , siehe Abbildung 1b. In die Kammer ragt eine Heizspirale, sie besteht aus Kupfer und lässt sich durch einen Widerstand  $R$  repräsentieren. Die Spirale hat einen spezifischen Widerstand  $r$ , eine Länge  $l$  und einen Durchmesser  $d$ .

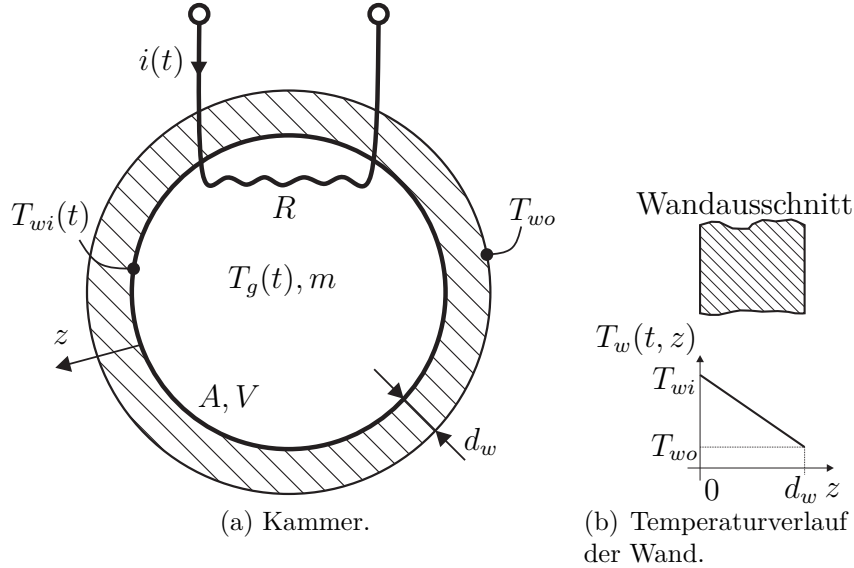


Abbildung 1: Prinzipskizzen der Kammer.

Die Leistungsbilanz für die Kammer lautet:

$$\frac{d}{dt}U = P + Q_g \quad (1)$$

$U = mc_V T_g$  ist die innere Energie, wobei  $c_V > 0$  ist.  $P$  ist die elektrische bzw. mechanische Leistung und

$$Q_g = -Q_w = A\sigma(T_{wi}^4 - T_g^4)$$

der Wärmestrom in das Gas zufolge der Strahlung. Es gilt  $A, \sigma > 0$ . Es handelt sich um ein ideales Gas, daher ist die ideale Gasgleichung  $m\bar{R}T_g = pV$  gültig, mit den Konstanten  $\bar{R}, V > 0$ ,  $p$  repräsentiert den Druck in der Kammer. Das System verfügt über einen Drucksensor.

Zur Repräsentation der Wanddynamik wird die Energieerhaltung

$$\dot{W} + \mathcal{Q} = 0, \quad (2)$$

verwendet. Es gilt weiters

$$\begin{aligned} \dot{W} &= A\rho_w c_w \int_0^{d_w} \frac{\partial T_w(t, z)}{\partial t} dz, \\ \mathcal{Q} &= -A\lambda_w \left. \frac{\partial T_w(t, z)}{\partial z} \right|_{z=d_w} - Q_w. \end{aligned}$$

mit den Konstanten  $\rho_w, c_w, \lambda_w > 0$ .

- a) Bestimmen Sie den Widerstand  $R$ , sowie die elektrische Leistung der Heizspirale als Funktion des Stromes  $i(t)$ . 1 P.
- b) Gesucht sind die Modellgleichung mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [T_g, T_{wi}]^T$  und dem Eingang  $u = i$ . 7 P.

- Geben Sie die zeitliche Änderung der Gastemperatur  $T_g(t)$  an.
- Es wird vorausgesetzt, dass die Wandtemperatur  $T_w(t, z)$  einem linearen Temperaturverlauf genügt

$$T_w(t, z) = \frac{d_w - z}{d_w} T_{wi}(t) + \frac{z}{d_w} T_{wo} \quad \text{mit } 0 \leq z \leq d_w. \quad (3)$$

Geben Sie mithilfe der Gleichung (3) die zeitliche Änderung der inneren Wandtemperatur  $T_{wi}(t)$  an.

- Gesucht ist die Ausgangsgleichung  $y = h(\mathbf{x})$ .
- c) Gegeben ist das folgende nichtlineare System mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}]^T$  und dem Eingang  $u = M$  2 P.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \frac{k}{J_1} (\beta R - \alpha r)^3 r + \frac{M}{J_1} \\ \beta \\ \frac{1}{J_2} (-k (\beta R - \alpha r)^3 R + GL \cos(\beta)) \end{bmatrix},$$

$$y = L \sin(\beta).$$

Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage  $(\mathbf{x}_R, u_R)$  und geben Sie es in der Form

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x}$$

an.

*Hinweis:* Aufgabe c) ist unabhängig von den anderen Teilaufgaben zu lösen.

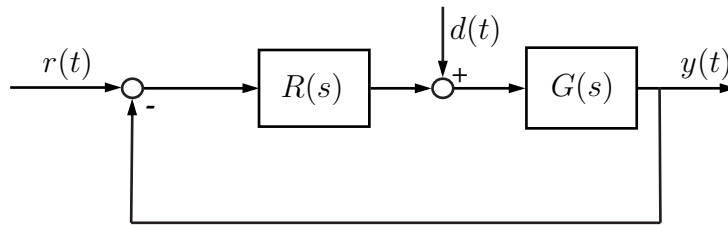


Abbildung 2: Strukturschaltbild des Regelkreises.

2. Gegeben ist der in Abbildung 2 dargestellte Regelkreis mit

$$G(s) = \frac{400\sqrt{3}}{(s + 2\sqrt{3})(s + 2)}$$

- a) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm von  $G(s)$  anhand der Asymptoten. Verwenden Sie dafür die beiliegende Vorlage. 2 P. |

*Hinweis:* Achten Sie auf eine qualitativ richtige Darstellung der wesentlichen Einzelheiten. Die genauen Zahlenwerte spielen nur eine untergeordnete Rolle.

- b) Entwerfen Sie für die Strecke  $G(s)$  einen PI - Regler  $R(s)$ , sodass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die nachfolgenden Spezifikationen erfüllt: 5 P. |

- Anstiegszeit  $t_r = 0.75$  s,
- prozentuales Überschwingen  $\ddot{u} = 10\%$  und
- $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ .

- c) Es soll nun die folgende Übertragungsfunktion 3 P. |

$$G(s) = \frac{1}{s - 3}$$

untersucht werden. Abbildung 2 zeigt die relevante Regelkreisstruktur, dabei soll der geschlossene Regelkreis mit den Reglern i) bis iii) auf interne Stabilität untersucht werden. Begründen Sie ihre Aussage.

i)

$$R(s) = \frac{s - 3}{s + 1}$$

ii)

$$R(s) = s + 10$$

iii)

$$R(s) = \frac{7s + 4}{s}$$

*Hinweis:* Aufgabe c) ist unabhängig von den anderen Teilaufgaben zu lösen.

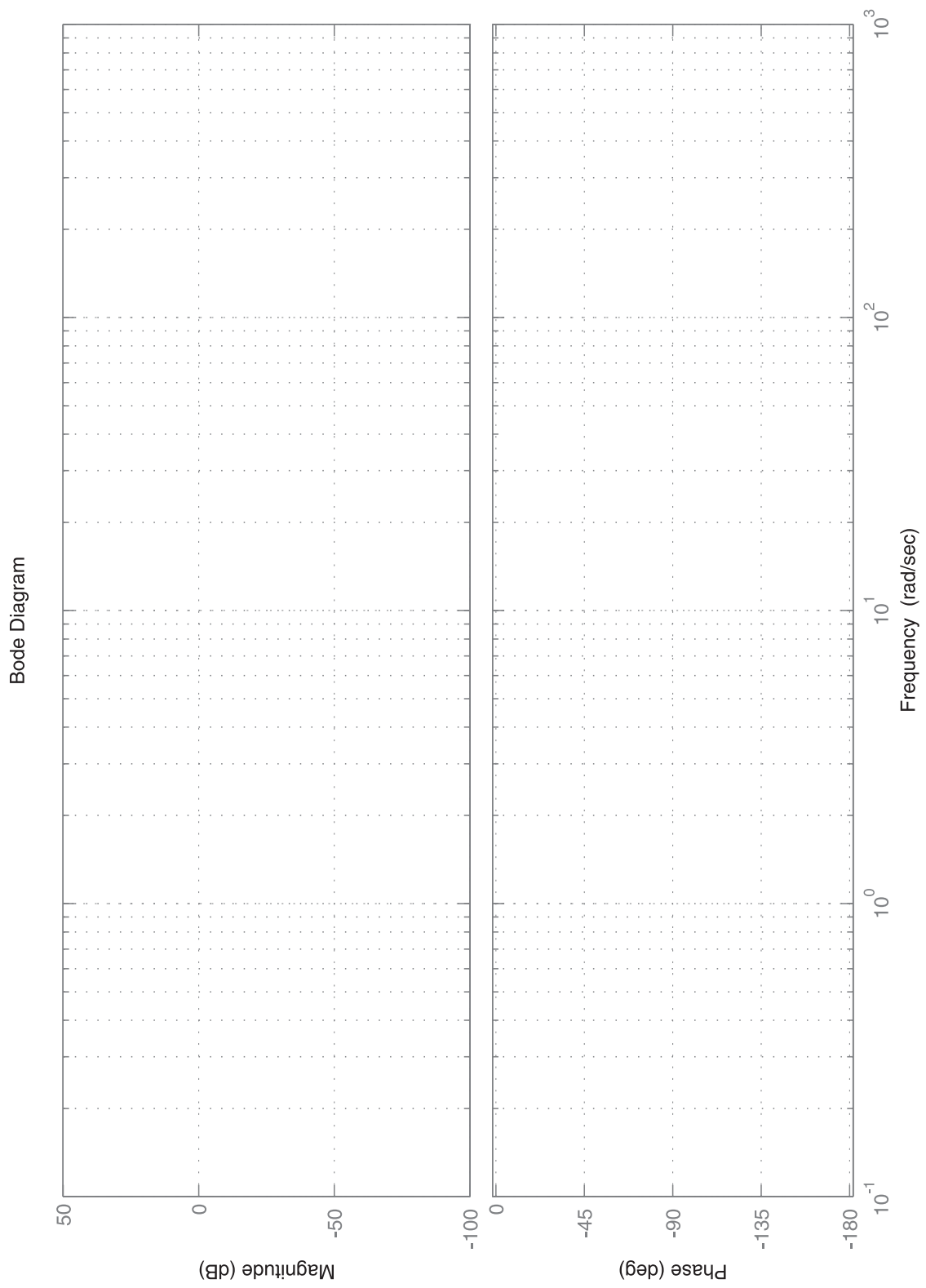


Abbildung 3: Bode-Diagramm der Strecke  $G(s)$  zu Aufgabe 2.a).

3. Bearbeiten Sie die nachfolgenden voneinander unabhängigen Aufgabenstellungen.

a) Gegeben ist das autonome System

$$\dot{x} = -x^2 \quad t > 0$$

mit  $x(0) = x_0 > 0$ .

i. Bestimmen Sie das zugehörige Abtastsystem mit der Abtastzeit  $T_a$ . 2 P.

*Hinweis:* Verwenden Sie **kein** numerisches Näherungsverfahren, wie etwa das Eulerverfahren.

ii. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für  $T_a = 1$  und  $x_0 = 1$  2 P.

$$x_k = \frac{1}{1+k} \quad k \geq 0$$

gilt.

b) Bei der Bestimmung der  $z$ -Übertragungsfunktion eines LTI-Systems mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  wird üblicherweise von einer Struktur mit Halteglied  $H$  und Abtaster  $A$  wie in Abb. 4.a dargestellt ausgegangen. Die  $z$ -Übertragungsfunktion lautet dann

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left( \frac{G(s)}{s} \right)$$

mit der Transformationsvorschrift

$$g_z(z) = \mathbf{Z}(\hat{g}(s)) = \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\hat{g}(s))|_{t=kT_a})$$

für ein Signal  $\hat{g}(s)$ . Um diese Beziehung herzuleiten, kann das in Abb. 4.b gezeigte Testsignal  $u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_a)$  mit der Impulsfolge  $(u_k) = (\delta_k) = (1, 0, 0, \dots)$  verwendet werden.

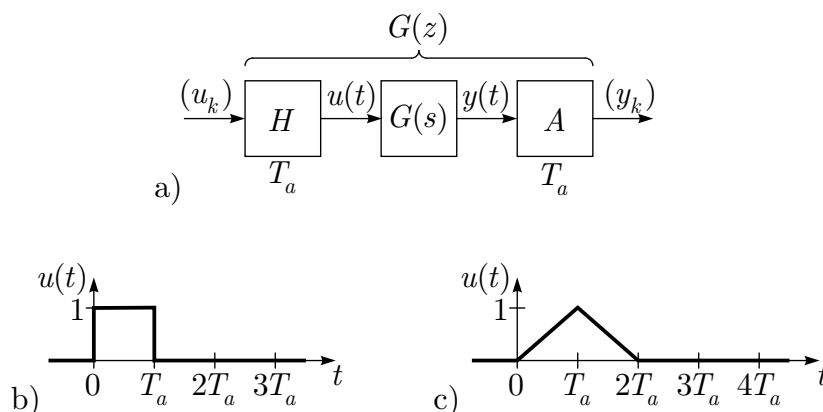


Abbildung 4: Abtastsystem.

Wird die Eingangsfolge nicht mit einem Halteglied  $H$  in ein treppenförmiges Signal umgewandelt, sondern mit einem linearen Interpolator  $H$  in ein stetiges, stückweise lineares Signal, so ergibt sich die Transformationsvorschrift

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \frac{(z-1)^2}{T_a z} \mathbf{Z} \left( \frac{G(s)}{s^2} \right). \quad (4)$$

Beweisen Sie (4). 6 P.

*Hinweis:* Sie können dabei als Testsignal  $u(t)$  die verschobene Dreiecksfunktion gemäß Abb. 4.c samt deren verschobener Impulsfolge  $(u_k) = (\delta_{k-1}) = (0, 1, 0, 0, \dots)$  verwenden.

4. Gegeben ist das Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (5a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (5b)$$

mit dem Messausgang  $y_k$ .

- a) Zeigen Sie, dass es nicht vollständig beobachtbar ist. 1 P.  
 b) Für das System (5) soll der Beobachter

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} (\hat{y}_k - y_k) \quad (6a)$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \quad (6b)$$

verwendet werden. In welchem Wertebereich müssen  $k_1 \in \mathbb{R}$  und  $k_2 \in \mathbb{R}$  7 P. liegen, damit der Beobachtungsfehler asymptotisch abnimmt? Geben Sie die entsprechenden Ungleichungen für  $k_1$  und  $k_2$  an. Zeichnen Sie den zulässigen Wertebereich in nachfolgender Abbildung ein.

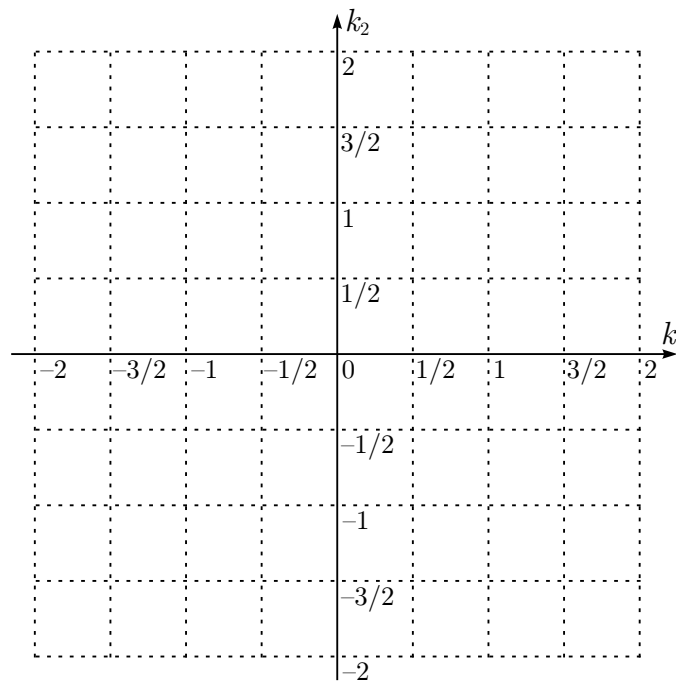


Abbildung 5: Zulässiger Wertebereich der Beobacherverstärkung.

*Hinweis:* Sie können zur Bestimmung des zulässigen Wertebereiches z. B. das Verfahren von Jury oder nach Anwendung der Tustin-Transformation auch das Verfahren von Routh-Hurwitz verwenden.

- c) Kann der Beobachter (6) als Dead-Beat Beobachter ausgeführt werden? Begründen Sie ihre Antwort. 2 P.