Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 27.01.2012

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	8	11	12	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Fr., 03.02.2012 ☐ Mo., 06.02.2012 ☐ Di., 07.02.2012

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 ist eine Prinzipskizze eines elektrohydraulischen Druckregelsystems dargestellt. Das System besteht aus einer mit einem permanenterregten Gleichstrommotor (Spannung u_m, Strom i_m, Widerstand R_m, Induktivität L_m, Ankerkreiskonstante k_m, Drehzahl ω, vgl. Abbildung 2) angetriebenen verstellbaren Pumpe (Stelleingang der Pumpe u_p). Das gesamte Trägheitsmoment der Pumpe und des Motors wird mit I_m bezeichnet. Durch Veränderung der Drehwinkelgeschwindigkeit ω des Motors und der Pumpe sowie durch Veränderung der Fördermenge mit Hilfe von u_p kann der Volumenstrom q_p der Pumpe in der Form

$$q_p = k_p \omega u_p^2, \quad k_p > 0$$

vorgegeben werden. Dieser Volumenstrom wird in das Volumen V gefördert, womit der Druck p in diesem Volumen gezielt beeinflusst werden kann. Zusätzlich fließt vom Volumen V ein Lastvolumenstrom q_l ab, welcher durch einen Störeingang d in der Form

$$q_l = k_l \sqrt{p} d, \quad k_l > 0$$

verändert wird. Der Druck im Volumen V errechnet sich somit aus der Massenerhaltung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p = \frac{\beta}{V} \left(q_p - q_l \right),$$

mit dem Kompressionsmodul β. Das mechanische Moment M_p der Pumpe kann direkt aus der Leistungserhaltung

$$q_p p = M_p \omega$$

errechnet werden und das elektrische Moment eines Gleichstrommotors lautet $M_m = k_m i_m$. Weiterhin errechnet sich die induzierte Spannung u_{ind} des Gleichstrommotors in der Form $u_{ind} = k_m \omega$.

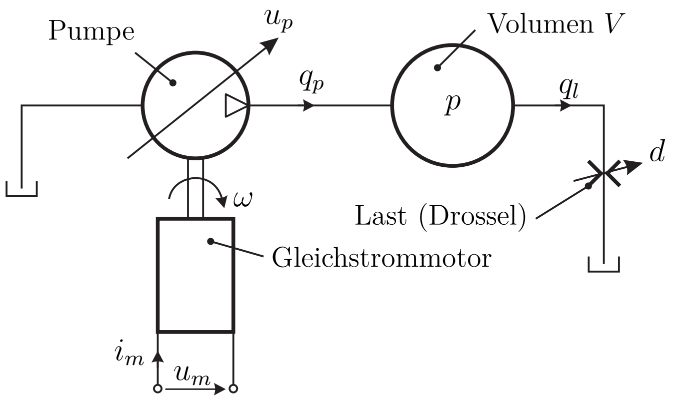

Abbildung 1: Prinzipskizze des Systems zu Aufgabe 1.

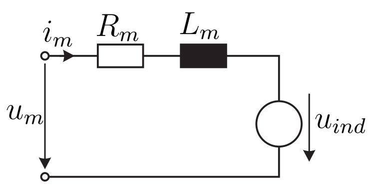

Abbildung 2: Elektrisches Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors.

a) Bestimmen Sie für das elektrohydraulische System aus den Abbildungen 1 und 2 ein mathematisches Modell der Form 4 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, d\right)$$
$$y = h\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, d\right),$$

wobei $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} i_m & \omega & p \end{bmatrix}$ der Zustand des Systems ist, $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_m & u_p \end{bmatrix}$ den Stelleingang beschreibt, d die Störung und $y = p$ den Ausgang des System darstellt.

b) Berechnen Sie für den Fall, dass $p = p_r$, $u_m = u_{m,r}$ sowie $u_p = u_{p,r}$ gilt, die Werte von d, i_m und ω so, dass sich das System in einer Ruhelage befindet. 2 P.|

c) Ermitteln Sie für eine allgemeine Ruhelage das linearisierte Modell in der Form 3 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\Delta\mathbf{u} + \mathbf{b}_d\Delta d$$
$$\Delta y = \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x}.$$

Hinweis: Sie müssen die Ausdrücke für die Ruhelage aus Aufgabe 1.b) nicht einsetzen.

2. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

   a) Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass für eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbare, skalare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt: 2 P.|

   $$\exists \; \xi \in (a, b) : \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Existenz und Eindeutigkeit des Differentialgleichungssystems

   $$\dot{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin(x)$$

   und geben Sie eine geeignete Lipschitz Konstante an.

   b) Die Lösung eines finit-dimensionalen, linearen, autonomen Systems der Ordnung n vereinfache sich für einen beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aufgrund einer speziellen Systemeigenschaft zu 2 P.|

   $$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{x}_0$$

   mit der Dynamikmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Berechnen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$.

   c) Von einem linearen, zeitinvarianten Eingrößensystem seien die Laplacetransformierte der Transitionsmatrix und der Eingangsvektor in der Form 4 P.|

   $$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s^2+3s-4} \\ 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

   gegeben.

   – Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und geben Sie das System in Zustandsraumdarstellung an.
   – Ist das autonome System global asymptotisch stabil? Begründen Sie ihre Antwort ausführlich.
   – Für welche Werte des Parameters β ist das System nicht vollständig erreichbar? Begründen Sie ihre Antwort ausführlich.

3. Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} u_k \tag{1a}$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}_k. \tag{1b}$$

Lösen Sie folgende Teilaufgaben.

a) Weisen Sie mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests die vollständige Erreichbarkeit des Systems (1) nach. 3 P.|

b) Erweitern Sie das System (1) um einen Integratorzustand $x_{I,k}$ in der Form 6 P.|

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + \left(r_k - \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k\right),$$

mit dem Sollwert r_k. Entwickeln Sie für das resultierende System einen Zustandsregler der Form

$$u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der Formel von Ackermann so, dass alle Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\lambda_i = 1/2$ liegen.

c) Der gesamte PI-Zustandsregler ergibt sich in der Form 2 P.|

$$u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x^T & k_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + k_P \left(r_k - \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k\right),$$

wobei $k_I = k_2$ und $\mathbf{k}_x^T - \mathbf{c}^T k_P = \mathbf{k}_1^T$, mit $\mathbf{k}_1^T$ und k_2 aus Teilaufgabe 3.b), gilt. Bestimmen Sie den Faktor k_P so, dass die Stellgröße u_k des Reglers für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $x_{I,0} = 0$ jenem Wert von u entspricht, welcher im stationären Fall notwendig ist, damit $y_s = r$ gilt. Berechnen Sie anschließend den Wert für $\mathbf{k}_x^T$.

4. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Gegeben ist der Standardregelkreis nach Abbildung 3 mit der Reglerübertragungsfunktion $R(s) = V_R$, der Streckenübertragungsfunktion $G(s) = \frac{V}{s(1+sT)}$ sowie $V_R, V, T > 0$. 2 P.|

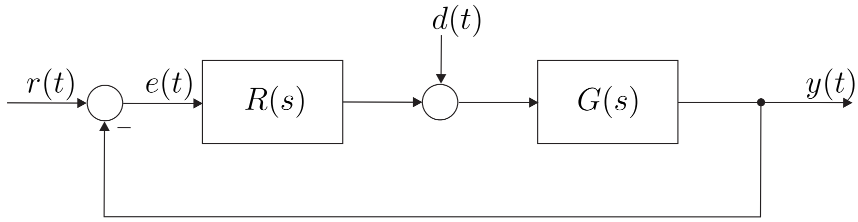

Abbildung 3: Standardregelkreis.

- Berechnen Sie den stationären Regelfehler e_∞ für eine Führungsgröße der Form $r(t) = t$.
- Berechnen Sie den stationären Regelfehler e_∞ für eine Störgröße der Form $d(t) = \sigma(t)$.

b) Gegeben ist die kontinuierliche Übertragungsfunktion 4 P.|

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s+7)(s+3)}.$$

Bestimmen Sie für das zugehörige Abtastsystem die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ vom Eingang u zum Ausgang y mit einer allgemeinen Abtastzeit $T_a > 0$. Ist die Übertragungsfunktion $G(z)$ BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie für das Abtastsystem mit der z-Übertragungsfunktion 3 P.|

$$G(z) = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}}$$

und der Abtastzeit $T_a = 1$ s die eingeschwungene Lösung (y_k) als Antwort des Systems auf die Eingangsfolge

$$(u_k) = \left(3 \sin\left(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{12}\right)\right).$$

d) Gegeben ist das Blockschaltbild einer Regelkreisstruktur nach Abbildung 4. 3 P.|

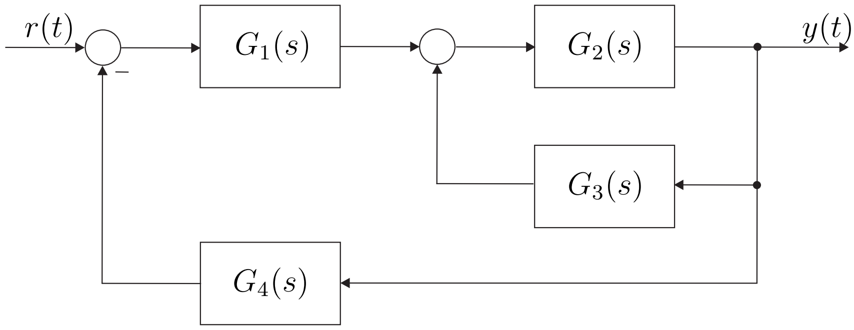

Abbildung 4: Regelkreisstruktur.

- Berechnen Sie allgemein die Übertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ vom Eingang r zum Ausgang y.
- Für die Übertragungsfunktionen gelte nun $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{1+sT}$, $G_3(s) = V$ und $G_4(s) = 1$. Für welche Werte von T und V ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil?