Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 02.03.2012

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	9	11	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Fr., 09.03.2012 ☐ Mo., 12.03.2012 ☐ Di., 13.03.2012

Viel Erfolg!

1. Lösen Sie folgende Teilaufgaben

   a) In Abbildung 1 ist die Prinzipskizze eines Segelbootes dargestellt. Im Weiteren werden Bewegungen des Bootes in Querrichtung (Geschwindigkeit $v_y = \dot{s}_y$) und Drehungen um den Drehpunkt 0 (Winkel φ) betrachtet. Bewegungen des Bootes in vertikaler Richtung werden vernachlässigt.

   Das Boot besitzt die Masse m, die Schwerpunktshöhe h und das Trägheitsmoment J bezüglich der x-Achse um den Drehpunkt 0. Die Position der Crew, welche sich als konzentrierte Masse m_C an Deck bewegt, wird durch h_C und s_C beschrieben.

   Auf das Boot wirken, neben der Erdbeschleunigung g, folgende Kräfte und Momente:

   - Die Auftriebskraft $F_A(\varphi) = \rho g V(\varphi)$ ist vom verdrängten Wasservolumen $V(\varphi)$ abhängig und greift um die Exzentrizität $e_A(\varphi)$ versetzt an. Die Dichte des Wassers wird mit ρ bezeichnet.
   - Das Wasser dämpft die Querbewegung mit der Kraft $F_d = d_y v_y$, welche um den konstanten Versatz e_d unter der Wasseroberfläche angreift.
   - Das Wasser dämpft die Wankbewegung (Drehung um den Winkel φ bezüglich der x-Achse) mit dem Moment, $M_d = d_\varphi \omega$, $\omega = \dot{\varphi}$.
   - Der Wind wirkt mit einer Kraftdichte q auf die effektive Querschnittsfläche des Bootes $A_L(\varphi)$, deren Flächenschwerpunkt sich auf der Höhe $h_L(\varphi)$ befindet.
   - Die Gewichtskraft der Crew m_C bewirkt ein Moment M_C um den Drehpunkt 0. Der Einfluss der Trägheit der Masse m_C auf die Bewegung des Bootes (d.h. auf die Quer- und Wankbewegung) wird in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt.

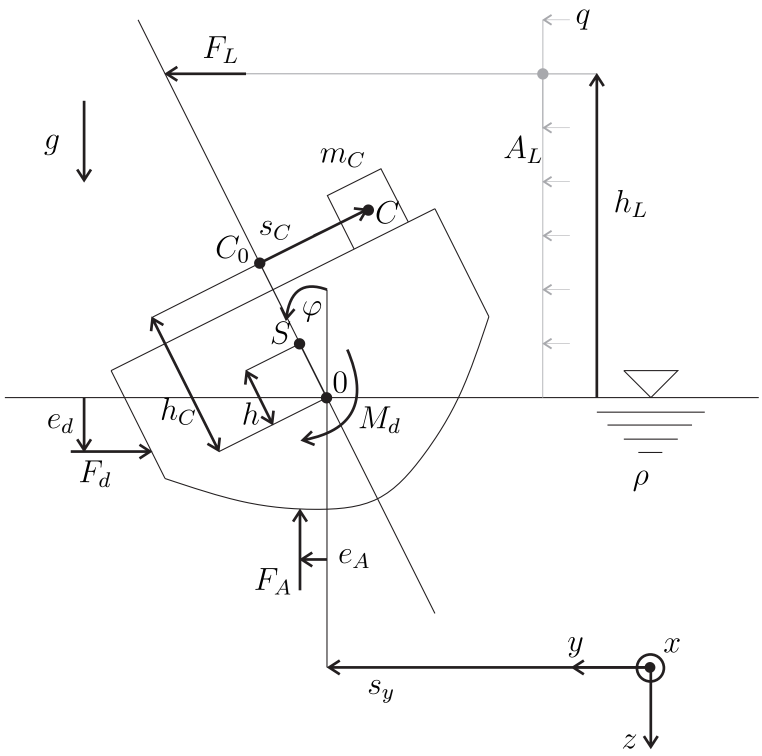

Abbildung 1: Prinzipskizze Segelboot.

Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben:

i. Geben Sie die Kraft F_L als Funktion des Wankwinkels φ sowie der Windstärke q an und ermitteln Sie das resultierende Moment M_L um den Drehpunkt 0. Berechnen Sie weiters das Moment M_C um den Drehpunkt 0, welches die Masse der Crew m_C aufbringt, als Funktion des Wankwinkels φ und der Position s_C. 1.5 P.|

ii. Das Boot wird im Weiteren durch ein System der Form 4 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, d) \tag{1a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, u, d), \tag{1b}$$

beschrieben. Als Eingang für das System wird die Position der Crew gewählt, $u = s_C$. Als Störung wirkt die Kraftdichte, d.h. $d = q$. Als Ausgang $\mathbf{y}$ werden der Winkel φ und die Quergeschwindigkeit v_y verwendet.
Wählen Sie dazu einen geeigneten Zustand $\mathbf{x}$, wobei zu beachten ist, dass die Geschwindigkeit v_y, aber nicht die Position s_y, notwendig ist. Berechnen Sie nun das System (1).

iii. Berechnen Sie für $\varphi = \varphi_s$ und $q = q_s$ alle Ruhelagen des Systems (1). 1.5 P.|

b) Betrachten Sie nun das nichtlineare Eingrößensystem

$$\dot{x} = -\sqrt{x}\, u. \tag{2}$$

und bearbeiten Sie folgende Punkte:

i. Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ für $x(0) = 1$, $u(t) = 4t$. 2 P.|

ii. Linearisieren Sie das System entlang dieser Trajektorie. 1 P.|

2. a) Gegeben ist folgendes autonomes LTI-System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{3}$$

Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben:

i. Geben Sie die Eigenwerte mit den zugehörigen Eigen- bzw. Hauptvektoren an. 2 P.|

ii. Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ des transformierten Systems. Hinweis: Beachten Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte. 1 P.|

iii. Gegeben ist der Startwert $\mathbf{x}_0 = [1,\ 0,\ -1]^{\mathrm{T}}$. Schreiben Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ an. Hinweis: Verwenden Sie dabei die Eigenschaft der Eigenvektoren. 1 P.|

b) Gegeben ist folgendes zeitdiskretes LTI-System:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \tag{4a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{4b}$$

Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben:

i. Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion und geben Sie deren Pole an. 1.5 P.|

ii. Schreiben Sie das nicht erreichbare Teilsystem mit dem Zustand x_i, $i \in \{1,2,3\}$ an. Hinweis: Überlegen Sie dazu, welche Zustände der Eingang u_k direkt beeinflusst und wie die Zustände (über die Systemdynamik) gekoppelt sind. 1 P.|
Bestimmen Sie weiters das asymptotische Verhalten des nicht erreichbaren Zustands x_i, d.h. $\lim_{k\to\infty} x_{i,k}$.

iii. Der nicht erreichbare Zustand x_i wirkt (über die Dynamikmatrix) auf das erreichbare Teilsystem mit dem Zustand 1 P.|

$$\mathbf{x}_{\mathbf{R}} = [x_r, x_s]^{\mathrm{T}},\ r, s \in \{1,2,3\} \backslash i,\ r \neq s. \tag{5}$$

Schreiben Sie das erreichbare Teilsystem mit Zustandsvektor $\mathbf{x}_{\mathbf{R}}$ und dem erweiterten Eingang $\bar{\mathbf{u}} = [u, x_i]^{\mathrm{T}}$ neu an.

iv. Die Pole der Übertragungsfunktion sind auch Eigenwerte des Zustandsraummodells. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen, wie dieses Beispiel demonstriert, nicht. Erklären Sie warum dies der Fall ist, obwohl das System (4) vollständig beobachtbar ist. 0.5 P.|

v. Wählen Sie einen neuen Ausgang y_k für das System (4), sodass die Führungsübertragungsfunktion nur noch erster Ordnung ist. 1 P.|

3. Gegeben ist das lineare, zeitkontinuierliche System

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \tag{6a}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}. \tag{6b}$$

a) Berechnen Sie die Markov-Parameter und die Hankelmatrix der Systems (6). 4 P.|

b) Zeigen Sie, dass das System (6) vollständig beobachtbar ist. Entwerfen Sie einen Dead-Beat-Beobachter für das System (6). 4 P.|

c) Bei der Abtastung bleibt die Beobachtbarkeit nicht zwangsläufig erhalten. Welche Bedingung muss die Abtastzeit im Fall von System (6) erfüllen, damit auch das zeitdiskrete System beobachtbar ist? Nehmen Sie als bekannt an, dass ein Eigenwert der Matrix **A** bei -1 liegt. 2 P.|

d) Zeigen Sie, dass es sich bei dem System (6) um eine Minimalrealisierung handelt. 1 P.|

4. a) Beurteilen Sie für die folgenden Übertragungsfunktionen des offenen Kreises 3 P.|

$$L_1^{\#}(q) = \frac{q+2}{q^3 - 3q^2 + 4}$$

$$L_2^{\#}(q) = \frac{1 + 3q - 2q^2 - q^3}{q^3 + 2q^2 - 3q + 1}$$

nach Abbildung 2, ob der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist.

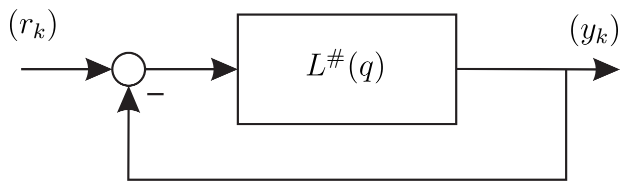

Abbildung 2: Blockschaltbild.

b) Bestimmen Sie für die Strecke mit der q-Übertragungsfunktion 5 P.|

$$G^{\#}(q) = \frac{32}{(2\sqrt{3} + q)^2(2 + (2 - \sqrt{3})q)}, \qquad T_a = 0.1$$

einen Regler mit dem Frequenkennlinienverfahren so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Anforderungen erfüllt:

- Anstiegszeit $t_r = 0.6\,\mathrm{s}$
- prozentuelles Überschwingen $\ddot{u} = 10\%$
- bleibende Regelabweichung $e_\infty|_{r_k=(1)^k} = 0$

c) Stellen Sie den Regler mit der q-Übertragungsfunktion 2 P.|

$$R^{\#}(q) = \frac{V_I\,(1 + qT_I)}{q}$$

für die Abtastzeit T_a als Differenzengleichung dar.