Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 14.09.2012

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Mo., 24.09.2012 ☐ Di., 25.09.2012

Viel Erfolg!

1. Im Folgenden wird ein kreisförmiger Orbit einer Rakete der Masse m_r um einen Himmelskörper der Masse M betrachtet, siehe Abbildung 1. Die Rakete wird mittels eines Triebwerks angetrieben und kann beschleunigt bzw. abgebremst werden indem Treibstoff mit der Geschwindigkeit v_a relativ zur Rakete nach hinten ($v_a > 0$) oder nach vorne ($v_a < 0$) ausgestoßen wird. Vereinfachend wird angenommen, dass die Rakete und damit das Triebwerk immer tangential zur Umlaufbahn ausgerichtet ist. Der Massenstrom des ausgestoßenen Treibstoffs berechnet sich über $\dot{m}_t = \rho_t A_t |v_a|$, wobei ρ_t die konstante Treibstoffdichte und A_t die konstante Öffnungsfläche des Triebwerks bezeichnet. Außerdem bezeichnet m_r die Leermasse der Rakete inklusive der Masse des restlichen Treibstoffs. Auf die Rakete wirken in radialer Richtung die Gewichtskraft $F_g = \frac{M m_r}{r^2} G$ sowie die Zentrifugalkraft $F_z = \frac{m_r v_r^2}{r}$, wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante bezeichnet.

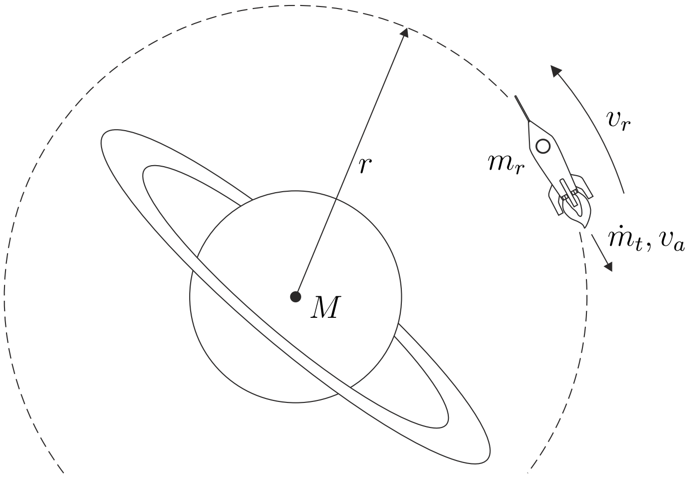

Abbildung 1: Prinzipskizze zur Aufgabe 1.

a) Die Impulsbilanz der Rakete in tangentialer Richtung liefert 6 P.|

$$m_r \dot{v}_r = \dot{m}_t v_a .$$

Bestimmen Sie die Impulsbilanz der Rakete in radialer Richtung und leiten Sie das mathematische Modell der Rakete in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ y &= h(\mathbf{x}, u) \end{aligned}$$

her, mit dem Zustand $\mathbf{x} = [m_r, v_r, r, \dot{r}]^T$, dem Eingang $u = v_a$ sowie dem Ausgang $y = r$.

b) Bestimmen Sie die Ruhelage zum Orbit $r = R$ und berechnen Sie das um diese Ruhelage linearisierte System. Nehmen Sie bei der Linearisierung an, dass $v_a \geq 0$ gilt. 4 P.|

2. Gegeben ist das zeitdiskrete MIMO-LTI System

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{8} & -1 & -2 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\
\begin{bmatrix} y_k \\ z_{1,k} \\ z_{2,k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k
\end{aligned}
\tag{1}
$$

mit der Abtastzeit $T_a = 0.5$.

Hinweis: Beachten Sie die besondere Struktur der Dynamikmatrix.

Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass das Abtastsystem (1) instabil ist. 1.5 P.|

b) Wählen Sie für den Eingang v_k ein Zustandsregelgesetz gemäß 3 P.|

$$v_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$$

und bestimmen Sie den Rückführvektor in der Art, dass die Pole des so geregelten Systems bei $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ zu liegen kommen.

Hinweis: Beachten Sie, dass das System nicht vollständig erreichbar ist.

c) Können Sie die in b) durchgeführte Polvorgabe auch ohne Beobachter implementieren? Begründen Sie ihre Antwort. 1 P.|

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass v_k gemäß den Anforderungen von Aufgabe b) gewählt wurde.

d) Zeigen Sie, dass das Abtastsystem (1) unabhängig von der Wahl von $\mathbf{k}^T$ über den Ausgang y_k nicht vollständig beobachtbar ist. 1.5 P.|

e) Aufgrund der besonderen Struktur des Systems lässt sich der Ausgang y_k über das reduzierte System 3 P.|

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u_k, \qquad \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

bestimmen. Bestimmen Sie die eingeschwungene Lösung y_k zur Eingangsfolge

$$u_k = 5 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{2} k) + \frac{3}{4} \cdot 1^k \right).$$

3. Die folgenden Aufgaben können getrennt voneinander gelöst werden.

a) Bestimmen Sie zur zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion 2.5 P.|

$$G(s) = \frac{s^2 + as + b}{(s+d)(s+c)}$$

eine Realisierung der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass 2 P.|

$$\exp((\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)t) = \exp(\mathbf{A}_1 t)\exp(\mathbf{A}_2 t)$$

gilt, wenn die beiden Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ die Bedingung $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ erfüllen.

c) Ist das System 2.5 P.|

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \frac{1}{3}u \end{aligned}$$

BIBO-stabil?

d) Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Verzögerungsgliedes 2-ter Ordnung an und skizzieren Sie dessen Sprungantwort für die Verstärkung $V = 10$, Dämpfungsfaktor $\xi = 0$ und Zeitkonstante $T = 10$. 2 P.|

e) Die Begrenzung eines Stellgliedes wird sehr oft als sogenannte Sättigungskennlinie modelliert. Skizzieren Sie eine Sättigungskennlinie und bezeichnen Sie relevante Punkte. 1 P.|

4. Gegeben ist die Übertragungsfunktion der zeitkontinuierlichen Strecke

$$G(s) = \frac{1}{\left(s + 2\left(2 - \sqrt{3}\right)\right)^2 \left(s + 2\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)}. \tag{2}$$

Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Entwerfen Sie für den Regelkreis von Abbildung 2 mit der Strecke (2), $d(t) = 0$ und $M(s) = 1$ einen Kompensationsregler $R(s)$ mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens. Der Regler soll dabei die Ordnung 2 besitzen und der geschlossene Regelkreis nach Abbildung 2 folgende Anforderungen erfüllen: 4 P.|

- Anstiegszeit $t_r = 0.75\,\mathrm{s}$
- Prozentuelles Überschwingen $\ddot{u} = 10\%$
- Bleibende Regelabweichung $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

Hinweis: Kompensieren Sie die Pole bei $s = -2\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

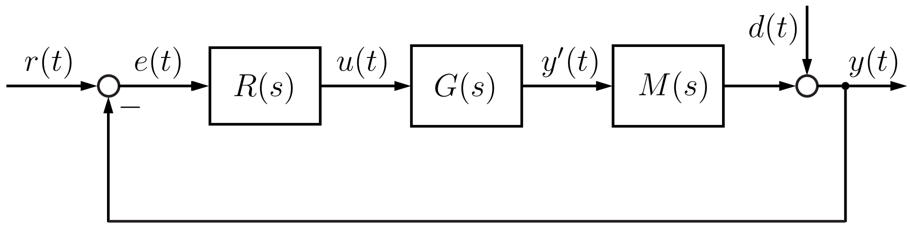

Abbildung 2: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

b) Es gelte nun $M(s) = e^{-sT_t}$. Wie groß darf T_t werden, damit der Regelkreis noch BIBO-stabil ist? 1 P.|

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben $M(s) = 1$ an.

c) Angenommen, $d(t) = 3\sin(5t)$ und $r(t) = 0$ in Abbildung 2. Wie muss man einen Regler $R(s)$ ansetzen, damit 2 P.|

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

gilt.

d) Gegeben sei wiederum der Regelkreis aus Abbildung 2 für $d(t) = 0$. Nun gelte 3 P.|

$$G(s) = \frac{s+3}{s-1}$$

und

$$R(s) = \frac{s\alpha + 2}{s + \beta}$$

mit den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wertebereich der Parameter α und β, sodass der Regelkreis intern stabil ist.