Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 23.11.2012

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	11	11	8	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Fr., 30.11.2012 ☐ Mo., 03.12.2012

Viel Erfolg!

1. Im Folgenden wird das Speicherkraftwerk aus Abbildung 1 betrachtet. Das im Oberbecken gesammelte Wasser fließt über eine Rohrleitung zur Düse, welche einen konzentrierten Wasserstrahl bildet und damit die Turbine antreibt.

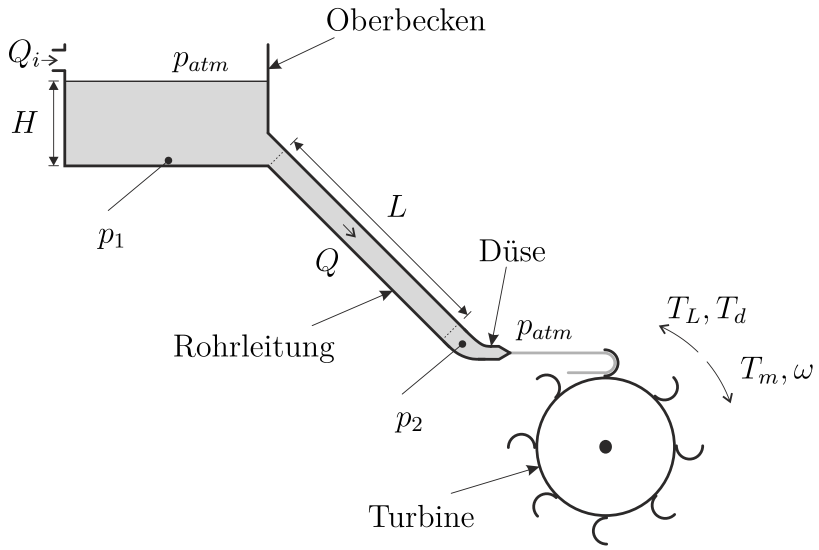

Abbildung 1: Darstellung des Speicherkraftwerks.

Das Oberbecken verfügt neben dem in die Rohrleitung abfließenden Volumenstrom Q auch über einen zufließenden Volumenstrom Q_i. Der hydrostatische Druck p_1 am Boden des Oberbeckens ergibt sich als Summe aus der flächenbezogenen Gewichtskraft des Wassers

$$\frac{F_G}{A_{OB}} = \rho g H$$

und dem konstanten atmosphärischen Druck p_{atm} an der Oberfläche des Wassers. Hierbei bezeichnet ρ die Massendichte von Wasser, F_G die Gewichtskraft des Wassers im Oberbecken und A_{OB} die Grundfläche des Oberbeckens. Die zylindrische Rohrleitung mit Querschnitt A und einem Neigungswinkel α zur horizontalen Ebene ist in Abbildung 2 dargestellt. Auf die enthaltene Wassermasse $m = \rho A L$ wirken die Drücke p_1 und p_2, sowie die Schwerkraft. Hierdurch erfährt das Wasser eine Beschleunigung längs der Rohrleitung. Man beachte dabei den Zusammenhang $Q = vA$ zwischen dem Volumenstrom Q und der Geschwindigkeit v der Wassermasse.

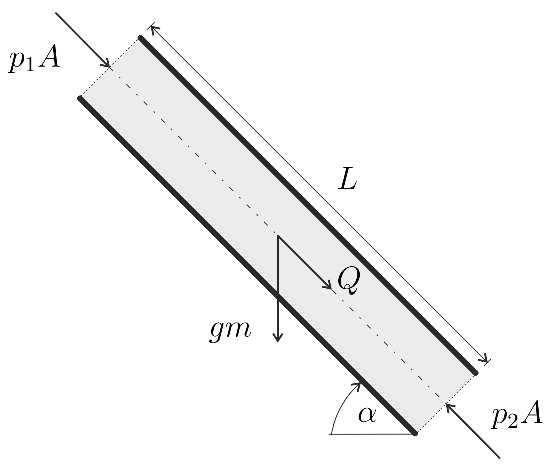

Abbildung 2: Skizze zur Modellierung der Rohrleitung.

Die Düse wird durch die Gleichung

$$Q = C\sqrt{p_2 - p_{atm}}$$

beschrieben, welche den Volumenstrom Q zum Druck am Ende der Rohrleitung p_2 und dem atmosphärischen Druck p_{atm} in Relation setzt, wobei C eine Konstante darstellt. Der Wasserstrahl, der auf die Turbinenschaufeln trifft, bewirkt ein Drehmoment

$$T_m = 2\rho R Q \left(\frac{Q}{A_j} - \omega R\right),$$

das die Turbine beschleunigt. Hierbei bezeichnet ω die Kreisfrequenz der Turbine, R den Turbinenradius und A_j die Querschnittsfläche des Wasserstrahls. Das Lastmoment $T_L = K\omega^2$ mit dem konstanten Faktor K sowie das Dämpfungsmoment $T_d = d\omega$ mit konstantem d wirken entgegen T_m. Die Turbine weist das Trägheitsmoment θ auf.

Lösen Sie die nachfolgenden Teilaufgaben:

a) Stellen Sie die Modellgleichungen des beschriebenen Systems in der Form 6 P.|

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\\ y &= g(\mathbf{x}, u)\end{aligned}$$

mit dem Eingang $u = Q_i$ und dem Ausgang $y = \omega$ dar. Wählen Sie dazu geeignete Zustandsgrößen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Hinweise:

i. Das Gesamtsystem setzt sich aus den drei Teilsystemen Oberbecken, Rohrleitung und Turbine zusammen, welche alle in der Modellbildung berücksichtigt werden müssen.

ii. Betrachten Sie das Wasser in der Rohrleitung als starren Körper.

iii. Das Wasser wird als inkompressibel betrachtet.

b) Geben Sie die durch $u_R > 0$ und $\omega_R > 0$ gekennzeichnete Ruhelage des Systems an. 2 P.|

c) Linearisieren Sie das betrachtete System um die im vorigen Punkt bestimmte Ruhelage und stellen Sie es in der Form 2 P.|

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

dar.

2. Gegenstand der nachfolgenden Aufgabenstellungen ist der in Abbildung 3 dargestellte Regelkreis.

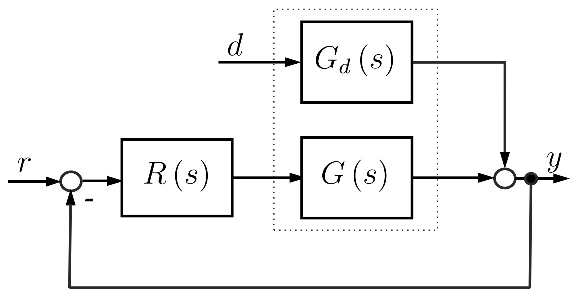

Abbildung 3: Einschleifiger Standardregelkreis.

Die Strecke ist gegeben durch die Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{V}{2}\frac{2s+1}{s^2-s-1}, \quad G_d(s) = \frac{1}{s}$$

mit $V \in \mathbb{R}$. Der Regler ist durch

$$R(s) = \frac{a_0 + a_1 s}{b_0 + b_1 s}$$

mit $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Nehmen Sie an, dass $V = 1$ gilt. Berechnen Sie den Regler $R(s)$ so, dass alle Pole der Führungsübertragungsfunktion auf -1 liegen. 3 P.|

b) In weiterer Folge wird V als reeller Parameter betrachtet. Bestimmen Sie den zulässigen Wertebereich für V unter dem die Führungsübertragungsfunktion mit dem Regler aus Unterpunkt a) BIBO-stabil ist. 3 P.|

Hinweise: Bitte stellen Sie eindeutig dar, welche Bedingung(en) an V zu stellen ist (sind), damit die Führungsübertragungsfunktion BIBO-stabil ist. Insbesondere können redundante Bedingungen nicht berücksichtigt werden. Falls Sie im Unterpunkt a) kein Ergebnis für $R(s)$ erhalten haben, können Sie ersatzweise den Regler $R(s) = \frac{1+s}{\frac{1}{4}+s}$ verwenden. Dies gilt auch für die nachfolgenden Unterpunkte, bei denen $R(s)$ benötigt wird.

c) Bestimmen Sie eine Minimalrealisierung des Reglers $R(s)$ aus Unterpunkt a). 1 P.|

d) Es gelte $V = 2$. Werden mit dem Regler aus Unterpunkt a) konstante Störungen $d(t) = d_c$ stationär unterdrückt? Falls nicht, geben Sie die bleibende Abweichung $\lim_{t\to\infty} y(t)$ zufolge von d_c an. Argumentieren Sie bezüglich der Anwendbarkeit des Grenzwertsatzes. 2 P.|

e) Nehmen Sie an, es gilt $R = 1$ und $V = 2$. Berechnen Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ für $r(t) = \sigma(t)$ sowie $d(t) = 0$. 2 P.|

3. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben, wobei die Aufgabenteile a), b) und c) unabhängig voneinander bearbeitet werden können.

a) Gegeben ist das nichtlineare System zweiter Ordnung 3 P.|

$$\dot{x}_1 = x_1(x_2 - 2), \tag{1a}$$
$$\dot{x}_2 = \cos(x_1) + (x_2 - 2) + u. \tag{1b}$$

i. Berechnen Sie für $u_R = 0$ sämtliche Ruhelagen $\mathbf{x}_R = [x_{1,R}\ x_{2,R}]^T$ des Systems (1). 1 P.|

ii. Wählen Sie aus der Menge aller Ruhelagen von (1) diejenige mit dem kleinsten Abstand zu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Führen Sie eine Zustandstransformation $\mathbf{x} \to \mathbf{z}$ durch, so dass die gewählte Ruhelage in den neuen Zuständen bei $\mathbf{z}_R = \mathbf{0}$ liegt. Schreiben Sie das System (1) in den neuen Zuständen an. 2 P.|
Hinweis: Der Abstand r eines Zustandsvektors $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^T$ zu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist durch $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ gegeben.

b) Gegeben ist das zeitkontinuierliche System 4 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2a}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{2b}$$

i. Stellen Sie die Hankelmatrix für das System (2) auf. Ist das System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar? 2 P.|

ii. Entwerfen Sie einen stabilisierenden Zustandsregler 2 P.|

$$u = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$$

für das System (2), der die Eigenwerte der Systemmatrix des geschlossenen Kreises auf $\{-1, -2\}$ festlegt.

c) Gegeben sind die beiden Übertragungsfunktionen 4 P.|

$$L_1(s) = \frac{s+1}{(s^2 - \frac{1}{4})(s+2)} \quad \text{und} \quad L_2(s) = \frac{5}{s(s^2 - s - 6)},$$

deren Ortskurven in Abbildung 4 dargestellt sind. Überprüfen Sie anhand des Nyquist-Kriteriums die BIBO-Stabilität der Übertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ des geschlossenen Regelkreises aus Abbildung 5, jeweils für $L(s) = L_1(s)$ und $L(s) = L_2(s)$.

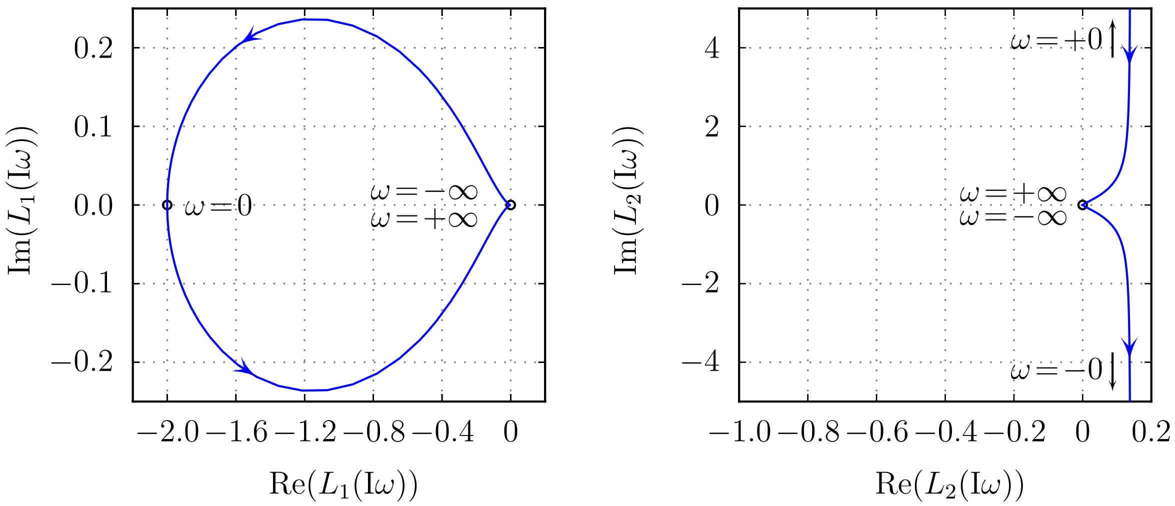

Abbildung 4: Ortskurven zu Aufgabe 3.c).

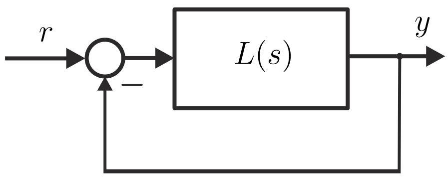

Abbildung 5: Geschlossener Regelkreis zu Aufgabe 3.c).

4. Bearbeiten Sie die nachfolgenden voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

   a) Gegeben ist das System 5 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \tag{3a}$$
$$y_k = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k \tag{3b}$$

   mit

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

   i. Geben Sie **allgemein** einen vollständigen Luenberger Beobachter für das System (3) mit dem Zustand $\hat{\mathbf{x}}_k$ an. Berechnen Sie allgemein die zugehörige Dynamik des Fehlers $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$. 2 P.|

   ii. Ist das System (3), (4) vollständig beobachtbar? 1 P.|

   iii. Können Sie den Zustandsbeobachter aus i. so auslegen, dass das Fehlersystem asymptotisch stabil ist? Falls ja, führen Sie die Berechnung explizit durch und treffen Sie dabei eine geeignete Wahl für die Entwurfsfreiheitsgrade. 2 P.|

   b) Gegeben ist das Abtastsystem 3 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

   Bestimmen Sie einen nicht trivialen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ (d.h. zumindest eine Komponente von $\mathbf{x}_0$ ist ungleich null) so, dass die Lösung des Systems in der Form

$$\mathbf{x}_k = \rho(k)\,\mathbf{x}_0$$

   mit $\rho(k) \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Geben Sie auch die Funktion $\rho(k)$ explizit an.