Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 08.03.2013

LÖSUNG

Aufgabe 1:

a) Wahl des Systemzustands: $\mathbf{x} = [\phi,\ \omega,\ s,\ v]^T$ mit $\omega = \dot{\phi}$ und $v = \dot{s}$.
Die Modellgleichungen ergeben sich zu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{1}{J}\left[M_w - k_1\phi - k_2\omega\tanh(s)\right] \\ v \\ \frac{F}{m} - \frac{d}{m}v \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$y = \begin{bmatrix} \phi \\ s \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

b) Es gibt unendlich viele Ruhelagen der Form $\mathbf{x}_R = [0,\ 0,\ s_R,\ 0]^T$ mit $s_R \geq 0$.

c) Das linearisierte System wird durch

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{k_2}{J}\tanh(s_R) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}$$

beschrieben. Die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ ist nicht asymptotisch stabil, da wegen $\det A = 0$ das linearisierte System mindestens ein Eigenwert $\lambda = 0$ haben muss.

d) Die gesuchte Zeit T_F errechnet sich zu

$$T_F = \frac{d}{F_v} s_{R,2}.$$

Aufgabe 2:

a) Die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ lauten

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 + 2I, \quad \lambda_3 = -1 - 2I, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -I \end{bmatrix}.$$

b) Das System ist nicht vollständig beobachtbar, da $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 = 0$.

c) Das system ist vollständig erreichbar für $\mathbf{b} \in \{\mathbb{R}^3 \mid b_1 \neq 0 \ \wedge\ (b_2 \neq \frac{3}{4}b_1 \ \vee\ b_3 \neq -\frac{1}{4}b_1)\}$.

d) Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 3:

a) Der Rückführungsvektor des Zustandsreglers $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$ lautet

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

b) Die reguläre Zustandstransformation lautet

$$\mathbf{V} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

c) Siehe Skriptum.

Aufgabe 4:

a) Die Gesamtübertragungsfunktion des Systems lautet

$$T_{u,y}(s) = \frac{k_V s(s+2) + k_R(1+sT)(s+2)}{s(s+a)(s+1) + k_R(1+sT)(s+2)}.$$

b) Bei Betrachtung des charakteristischen Polynoms

$$s^3 + s^2(1+a) + s(a+k_R) + 2k_R = 0$$

erkennt man, dass der Koeffizient von s^2 durch k_R nicht beeinflusst werden kann und nicht das gleiche Vorzeichen wie s^3 aufweist. Daher kann das System mit diesem Regler nicht stabilisiert werden.

c) Das charakteristische Polynom lautet

$$s^3 + s^2 3k_R + s(7k_R - 1) + 2k_R = 0.$$

Durch Anwendung des Routh-Hurwitz Verfahrens ergibt sich die Bedingung

$$k_R > \frac{5}{21}.$$

d) Durch Anwendung des Endwerttheorems der Laplace-Transformation ergibt sich die Lösung

$$k_V = \frac{a}{2}.$$