Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 19.04.2013

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	11	9	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Fr., 26.4.2013 ☐ Mo., 29.4.2013

Viel Erfolg!

1. Im folgenden Beispiel soll das elektrohydraulische System aus Abbildung 1 mit dem hydropneumatischen Kolbenspeicher der Länge L_k untersucht werden. Der Kolben, mit vernachlässigbarer Dicke, der Masse m_k und der Kolbenfläche A_k, trennt die beiden Kammern dicht und reibungsfrei voneinander ab. Für die abgeschlossene Gasseite, mit dem Gasdruck p_g gelte das ideale Gasgesetz $m_g R_s T_g = p_g V_g$, mit der spezifischen Gaskonstanten R_s, der Gastemperatur T_g, dem Gasvolumen V_g und der konstanten Gasmasse m_g. Für den Wärmeaustausch zwischen Gas und der Umgebung, mit der Umgebungstemperatur T_U, gelte vereinfachend ein Wärmestrom der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q = c_g(T_U - T_g)$. Die innere Energie des Gases lässt sich mit $U = m_g \frac{R_s}{\kappa-1} T_g$, mit dem konstanten Isentropenexponenten $\kappa > 1$ beschreiben. Für das Öl sei angenommen, dass die Beschreibung eines konstanten Kompressionsmoduls β mit $\frac{\partial \rho_o}{\partial p_o} = \frac{\rho_o}{\beta}$ ausreichend ist und die Öltemperatur T_o ebenfalls konstant ist. Mithilfe einer Axialkolbenpumpe kann der Volumenstrom in das Ölvolumen reguliert werden. Dieser ergibt sich zu $q = k_P \alpha$, mit der Pumpenkonstanten k_p und dem Schwenkwinkel α.

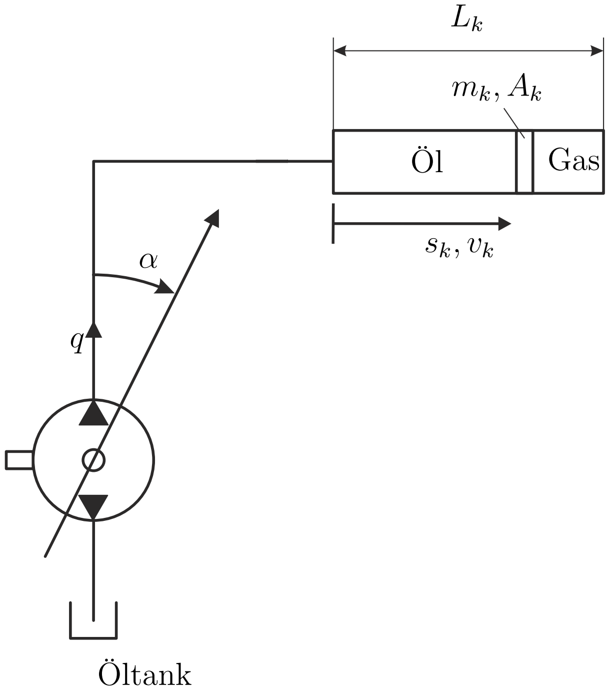

Abbildung 1: Hydropneumatisches System.

Lösen Sie die nachfolgenden Teilaufgaben:

a) Berechnen Sie die Temperaturdifferentialgleichung des Gases aus der Energiebilanz 1 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q - p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V.$$

b) Berechnen Sie mithilfe der Massenbilanz 1 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_o V) = \sum(q\rho_o).$$

die Druckdifferentialgleichung des Öls.
Hinweis: Verwenden Sie für die Ölseite $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_o = \frac{\partial \rho_o}{\partial p_o}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_o$.

c) Stellen Sie die Modellgleichungen mit den Zustandsgrößen $\mathbf{x} = \left[s_k, v_k, p_o, T_g\right]$ in der Form 4 P.|

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\
\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, u)
\end{aligned}
$$

mit dem Eingang $u = \alpha$ und dem Ausgang $\mathbf{y} = [s_k, p_g]^T$ dar.

d) Wie viele Ruhelagen hat das System? 1 P.|

e) Berechnen Sie die allgemeine Ruhelage des Systems $\mathbf{x}_R$ für $s_{k,R} = L_k/2$ und den sich dabei einstellenden Gasdruck $p_{g,R}$. 3 P.|

2. Gegeben ist der Standardregelkreis nach Abbildung 2 mit der Übertragungsfunktion der zeitkontinuierlichen Strecke

$$G(s) = \frac{20}{s\left(2 + 2\xi s + 0.5 s^2\right)}, \qquad \xi > 0. \tag{1}$$

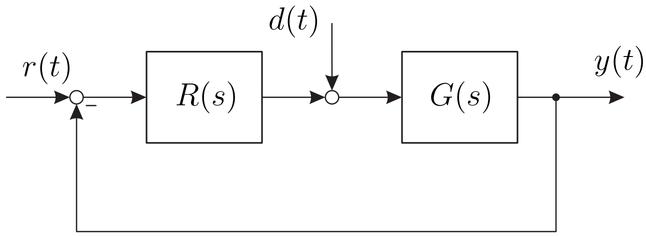

Abbildung 2: Standardregelkreis.

a) Zeichnen Sie das Bodediagramm der Übertragungsfuntion $G(s)$ für $\xi = 1$ (Asymptoten sind ausreichend). Benutzen Sie dazu bitte die beiliegende Vorlage! 2 P.|

b) Für die Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ gelte $\xi = 0.7$. Entwerfen Sie für den Regelkreis von Abbildung 2 mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens einen realisierbaren Kompensationsregler $R(s)$ der Ordnung 2. Setzen Sie dazu $d(t) = 0$. Der geschlossene Regelkreis hat dabei die folgenden Anforderungen 4 P.|

   - Anstiegszeit $t_r = 0.3\,\mathrm{s}$
   - Prozentuelles Überschwingen $\ddot{u} = 10\%$
   - Bleibende Regelabweichung $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

   zu erfüllen.

c) Es gelte $R(s) = K \in \mathbb{R}, K > 0$ und $d(t) = 0$. Bestimmen Sie allgemein den Wertebereich von ξ, für den der geschlossene Regelkreis nach Abbildung 2 BIBO-stabil ist. 3 P.|

d) Nehmen Sie an, dass der geschlossene Regelkreis nach Abbildung 2 mit $R(s) = K \in \mathbb{R}$ und $G(s)$ aus (1) BIBO-stabil ist. Berechnen Sie für $r(t) = 0$ und $d(t) = \sigma(t)$ den stationären Wert der Ausgangsgröße. 2 P.|

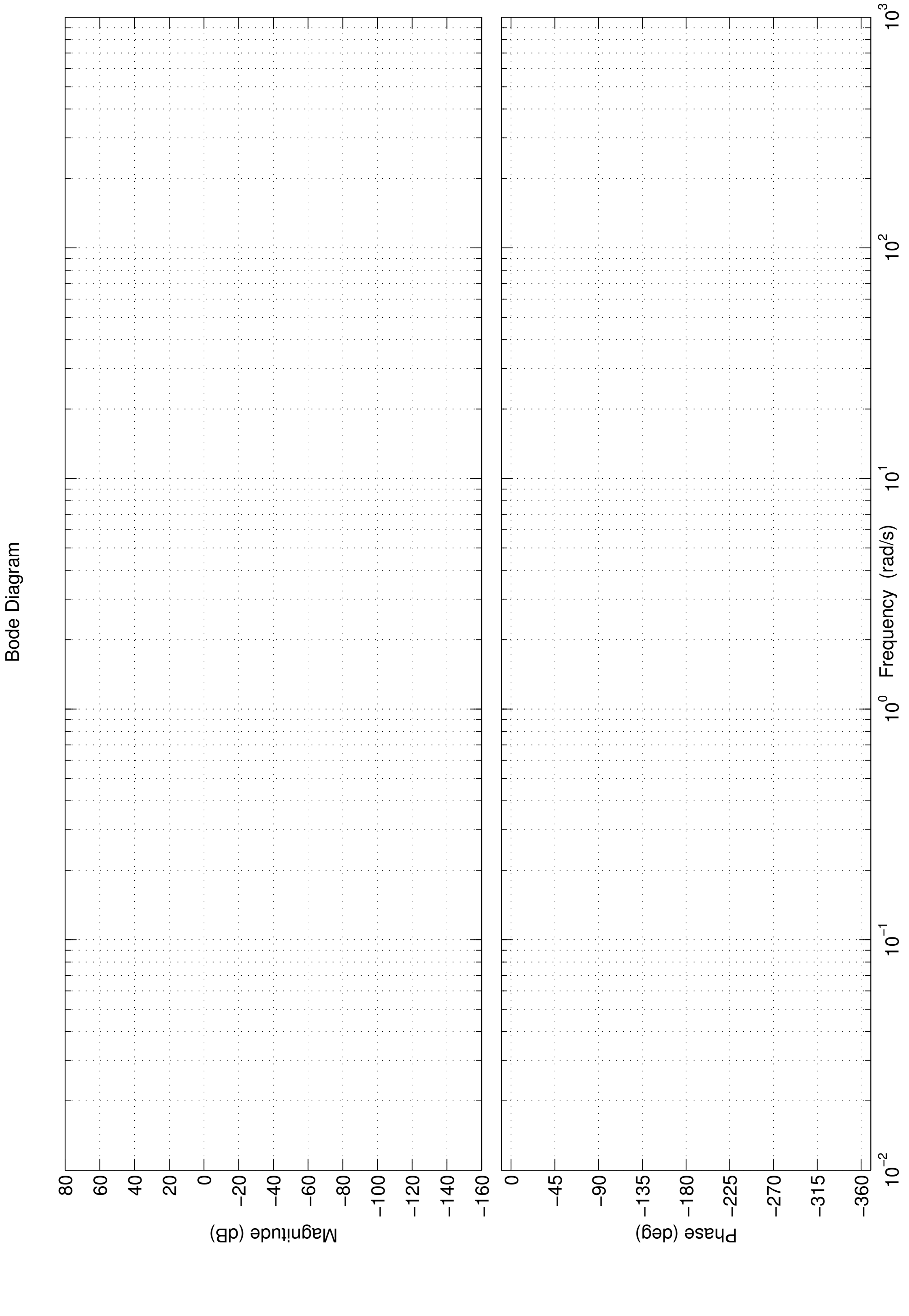

Abbildung 3: Bode-Diagramm der Strecke $G(s)$ zu Aufgabe 2 a).

3. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Alle Teilaufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Abbildung 4 zeigt den Amplitudengang sowie die Nyquist-Ortskurve einer zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$. Welche der folgenden Übertragungsfunktionen wird dadurch dargestellt. Begründen Sie Ihre Antworten. 3 P.|

1) $G_1(s) = \dfrac{2+s}{2+s+2s^2}$ 2) $G_2(s) = \dfrac{2-s}{2+s+2s^2}$

3) $G_3(s) = \dfrac{4}{(2+s+2s^2)(2+s)}$ 4) $G_4(s) = \dfrac{4}{(2+s+2s^2)(2-s)}$

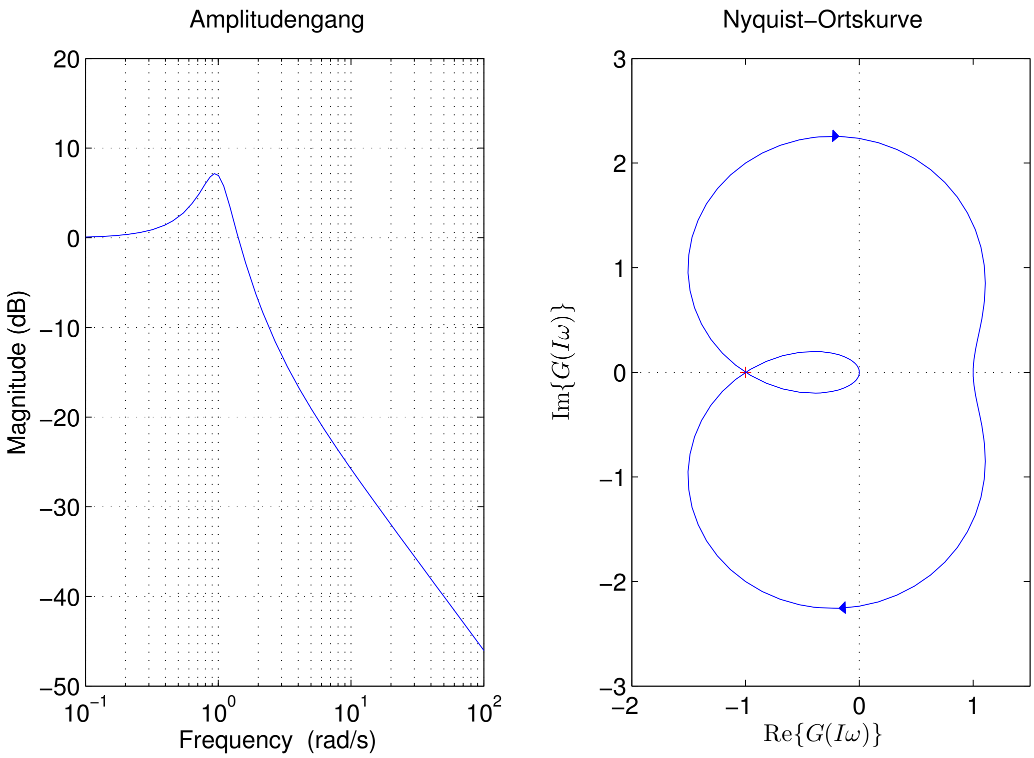

Abbildung 4: Amplitudengang und Nyquist-Ortskurve zu Aufgabe 3 a).

b) Betrachten Sie den Regelkreis im linken Teil der Abbildung 5 mit der Strecke

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+4)} \tag{2}$$

und einem Regler der Form

$$R(s) = \frac{V}{s}\frac{(s+2)^2}{1+sT_R}, \quad T_R > 0. \tag{3}$$

Die zugehörige Nyquist-Ortskurve des offenen Kreises $L(s) = R(s)G(s)$ ist im rechten Teil der Abbildung 5 dargestellt.

i. Untersuchen Sie mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums, ob der geschlossene Regelkreis nach Abbildung 5 BIBO-stabil ist. 2 P.|

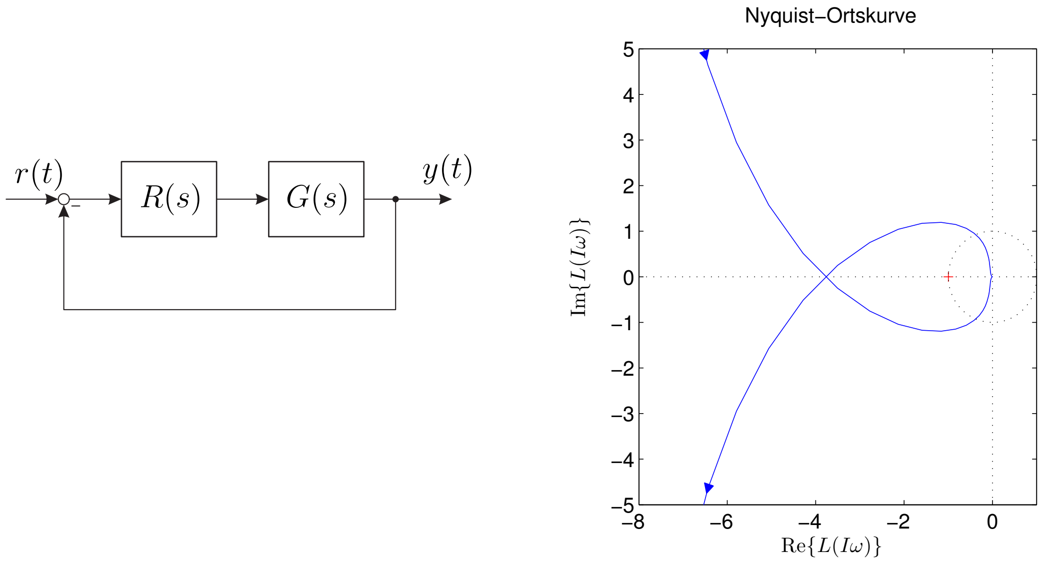

Abbildung 5: Regelkreis und Nyquist-Ortskurve des offenen Kreises zu Aufgabe 3 b).

ii. Kann die Untersuchung der Stabilität des geschlossenen Regelkreises nach Abbildung 5 in diesem Fall mittels des Nyquist-Kriteriums in Frequenzkennliniendarstellung erfolgen? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

c) Gegeben ist das autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{4}$$

Mittels einer geeigneten Matrix $\mathbf{V}$ kann das System über die reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}$ in die reelle Jordansche Normalform

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}, \qquad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \tag{5}$$

überführt werden, wobei $\tilde{\mathbf{A}}$ nur aus Jordanblöcken besteht.

i. Leiten Sie einen Ausdruck für die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems (4) in Abhängigkeit der Transitionsmatrix $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$ des transformierten Systems (5) her. 1 P.|

ii. Berechnen Sie für 2 P.|

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems (5) und bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$.

4. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben

a) Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

i. Entwerfen Sie für dieses System einen vollständigen Luenberger-Beobachter. Berechnen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix an den Stellen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$ zu liegen kommen. 3 P.|

ii. Ist die Fehlerdynamikmatrix eines trivialen Beobachters für dieses System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

b) Transformieren Sie das System 2 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{r},$$

mit der Ruhelage $\mathbf{u}_R = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}_R \neq \mathbf{0}$ und dem konstanten nichttrivialen Vektor $\mathbf{r}$ in ein System der Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u},$$

mit der Ruhelage $\mathbf{u}_R = \mathbf{0}$ und $\mathbf{z}_R = \mathbf{0}$. Wie lautet die Transformationsvorschrift für $\mathbf{z}$ und wie hängen $\bar{\mathbf{A}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ab.

c) Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

und der Zeitverlauf der Impulsfolge g_k in Abbildung 6.

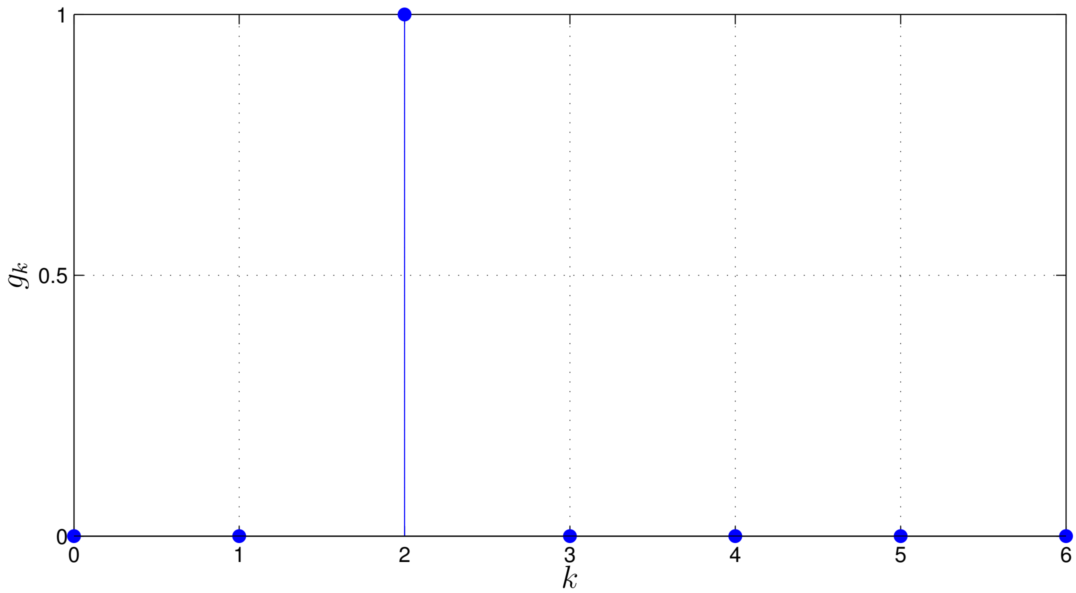

Abbildung 6: Zeitdiskrete Impulsantwort.

i. Geben Sie die Hankelmatrix $\mathbf{H}$ des Systems an. 3 P.|

ii. Welche Aussage kann aus der Regularität von $\mathbf{H}$ geschlossen werden? 1 P.|