Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 27.09.2013

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	12	7	10	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Fr., 4.10.2013 ☐ Mo., 7.10.2013

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist das in Abb. 1 dargestellte Schiff (Katamaran), bestehend aus einem dreiecksförmigen Segel (Länge L, Höhe H, vgl. Abb. 2), zwei Auftriebskörpern mit der Grundfläche A sowie einem Rollkompensationssystem mit zwei Wassertanks. Wirkt auf das Segel die Windkraftdichte f_w, so erfolgt eine Drehung φ des Schiffes um die Rollachse. Um dieser Drehung entgegenzuwirken, kann Wasser vom linken in den rechten Tank umgepumpt werden.

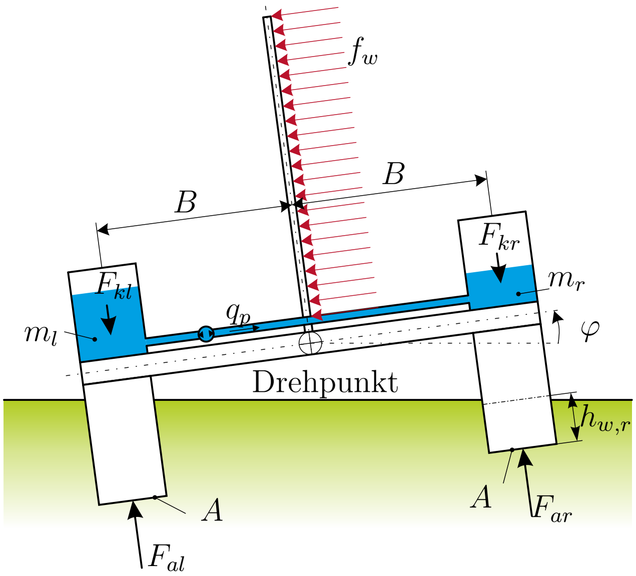


Abbildung 1: Prinzipskizze des Schiffes.

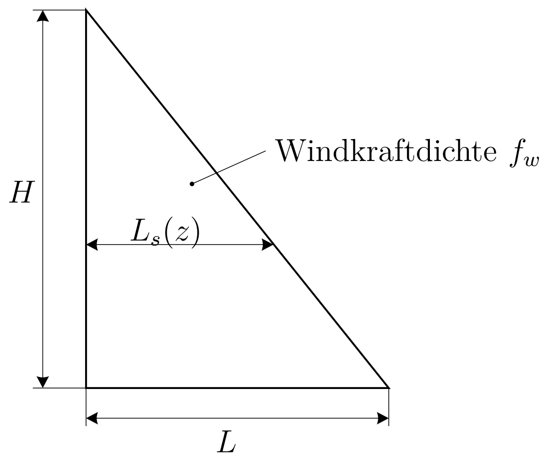


Abbildung 2: Geometrie des Segels.

Lösen Sie die nachfolgenden Teilaufgaben:

a) Berechnen Sie ein mathematisches Modell der Rollbewegung des Schiffes. Ermitteln Sie dazu folgende Zwischengrößen: 6 P.|

(i) Berechnen Sie das Moment M_w um die Drehachse zufolge der Windkraftdichte $f_w = \alpha_0 v_w + \alpha_1 v_w^2$, mit der Windgeschwindigkeit $v_w > 0$ und den positiven Konstanten α_0, α_1. Es wird angenommen, dass die Windkraftdichte orthogonal auf das Segel wirkt und damit gilt

$$M_w = \int_{z=0}^{H} L_s(z) f_w(v_w) z \mathrm{d}z,$$

mit der Segellänge L_s, siehe Abb. 2.

(ii) Ermitteln Sie das Auftriebsmoment der beiden Auftriebskörper. Nehmen Sie dazu kleine Winkel an, d.h. $\sin(\varphi) = \varphi$, $\cos\varphi = 1$ und beachten Sie, dass die Auftriebskraft proportional zur Dichte ρ_w, der Erdbeschleunigung g sowie dem verdrängten Volumen $V = Ah_w$ ist. Dabei beschreibt h_w die Eintauchtiefe des Auftriebskörpers, wobei $h_w = h_0$ für $\varphi = 0$ gilt.

(iii) Berechnen Sie das Moment M_k zufolge der beiden Wassertanks, wobei wiederum kleine Winkel angenommen werden sollen und die Wassermassen m_l, m_r als Punktmassen modelliert werden.

(iv) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der Rollbewegung mit Hilfe der Drehimpulserhaltung um die Drehachse auf. Das gesamte Trägheitsmoment (inkl. Rollkompensationssystem) ist dabei konstant und wird mit I bezeichnet.

(v) Geben Sie Differentialgleichungen für die Wassermassen m_l und m_r in den beiden Kompensationstanks an. Der vom linken in den rechten Tank geförderte Massenstrom errechnet sich zu $q_p\rho_w$, wobei der Volumenstrom q_p als Funktion der Drehzahl n_p in der Form $q_p = \gamma_0 n_p + \gamma_1 n_p^3$, mit den Konstanten $\gamma_0, \gamma_1 > 0$, gegeben ist.

(vi) Stellen Sie das gesamte mathematische Modell in der Form

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, d)\\ y &= h(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^T = [\varphi, \omega, m_l, m_r]$, dem Eingang $u = n_p$, der Störung $d = v_w$ sowie dem Ausgang $y = \varphi$, auf.

b) Ermitteln Sie die Ruhelagen $\mathbf{x}_r$, u_r des Systems für eine konstante Windgeschwindigkeit $v_{w,R} > 0$ sowie einen konstanten Winkel $\varphi_R = 0$. Nehmen Sie dazu an, dass $m_l + m_r = m_0$ gilt. Linearisieren Sie anschließend das System um diese Ruhelage und geben Sie eine Darstellung der Form 3 P.|

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}_u\Delta u + \mathbf{b}_d\Delta v_w\\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x}\end{aligned}$$

an. Geben Sie weiterhin an, wie sich die Größen $\Delta\mathbf{x}$, Δu sowie Δd berechnen.

c) Für eine gewisse Wahl der Parameter ergeben sich die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und der Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T$ zu 3 P.|

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1, 0, 0, 0].$$

Zeigen Sie, dass das linearisierte System mit diesen Matrizen nicht vollständig beobachtbar ist. Geben Sie anschließend eine Linearkombination der Zustände in der Form $a_1\Delta\varphi + a_2\Delta\omega + a_3\Delta m_l + a_4\Delta m_r$ an, die bei Messung von $\Delta\varphi$ nicht beobachtet werden kann.

2. Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

   a) Gegeben ist das lineare zeitinvariante System der Form 4 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

   mit der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\boldsymbol{\Phi}$ zu diesem System. Führen Sie dazu eine Transformation auf Jordan-Form durch!

   b) Gegeben ist die folgende lineare zeitdiskrete Strecke 3 P.|

$$G(z) = \frac{5}{\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

   Berechnen Sie die eingeschwungene Lösung dieser Strecke auf die Eingangsfolge

$$(u_k) = 3(1^k) - 7(0.5^k) + \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}k + \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

3. Frequenzkennlinienverfahren

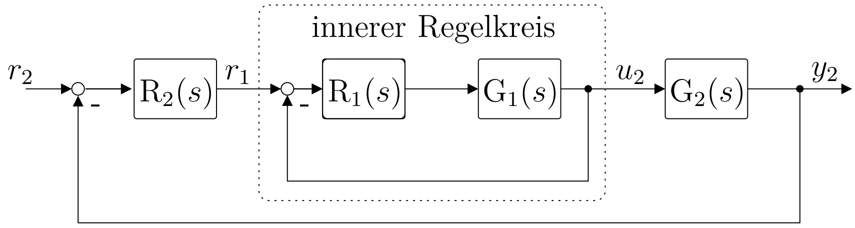


Abbildung 3: Kaskadierter Regelkreis.

Betrachtet wird der in Abb. 3 dargestellte kaskadierte Regelkreis mit den Streckenübertragungsfunktionen

$$\mathrm{G}_1(s) = \frac{10}{s}, \qquad \mathrm{G}_2(s) = \frac{20}{2s^2 + 3s + 2}.$$

Zur Stabilisierung des inneren Regelkreises wird ein Proportionalregler $\mathrm{R}_1(s) = 4$ eingesetzt.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen inneren Regelkreises $T_{r_1,u_2}(s)$. 1 P.|

b) Benutzen Sie die beiligende Vorlage und skizzieren Sie das Bode-Diagramm des geschlossenen inneren Regelkreises $T_{r_1,u_2}(s)$, der Streckenübertragungsfunktionen $\mathrm{G}_2(s)$, und der Übertragungsfunktion $T_{r_1,y_2}(s)$. 2 P.|

c) Welche Voraussetzung muss der innere Regelkreis erfüllen, damit ein einfacher separierter Entwurf des Reglers $\mathrm{R}_2(s)$ zulässig ist? 1 P.|

d) Entwerfen Sie den Regler $\mathrm{R}_2(s)$ im Sinne einer Kaskadenregelung.

   i. Bestimmen Sie die Kenngrößen t_r, ü und e_∞ anhand der in Abb. 4 vorgegebenen Soll-Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises und zeichnen Sie diese ein. Die Anstiegszeit t_r soll ganzzahlig gerundet werden. 1 P.|

   ii. Der Regler $\mathrm{R}_2(s)$ soll die Struktur $\mathrm{R}_2(s) = V(T + 1/s^\rho)$ aufweisen. Wie ist der Parameter $\rho \in \{0, 1, 2\}$ zu wählen damit die Spezifikation für $e_\infty|_{r_2(t)=\sigma(t)}$ aus Abb. 4 erfüllt werden kann. 1 P.|

   iii. Ermitteln Sie die Reglerkoeffizienten V und T nach dem Frequenzkennlinienverfahren. 4 P.|

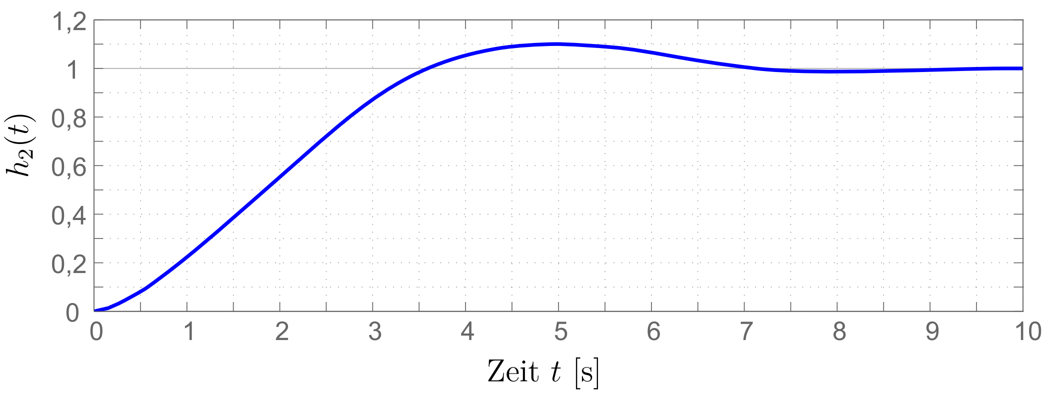
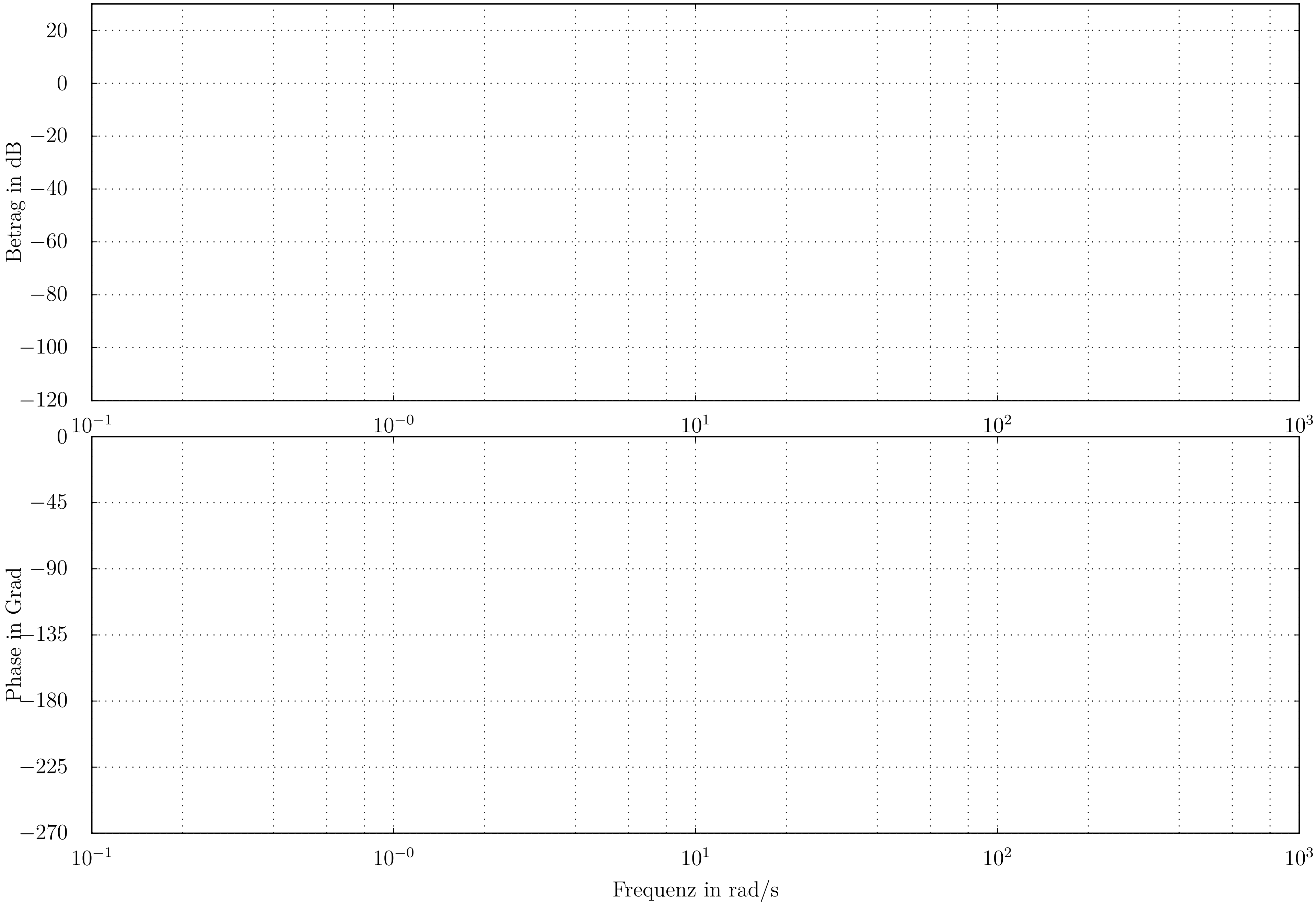


Abbildung 4: Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.


Betrag in dB
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
Phase in Grad
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
10^{-1}
10^{-0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequenz in rad/s

4. PI-Zustandsregler

Für ein lineares, zeitinvariantes System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} u_k \qquad , \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}} \mathbf{x}_k$$

soll ein zeitdiskreter PI-Zustandsregler

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + \left(r_k - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k\right)$$

$$u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x^{\mathrm{T}} & k_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + k_p \left(r_k - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k\right)$$

mit dem Rückführvektor $\mathbf{k}_x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ und den Parametern k_I und k_p entworfen werden.

a) Zeigen Sie, dass für die gegebene Strecke die Entwurfsvoraussetzung der vollständigen Erreichbarkeit gegeben ist. 2 P.|
Hinweis: Untersuchen Sie zu diesem Zweck das um den Integrator erweiterte System $\mathbf{x}_{e,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} & x_{I,k} \end{bmatrix}$.

b) Geben Sie den geschlossenen Regelkreis mit dem Zustand $\mathbf{x}_{g,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} & x_{I,k} \end{bmatrix}$ zunächst allgemein in der Form 2 P.|

$$\mathbf{x}_{g,k+1} = \mathbf{\Phi}_g \mathbf{x}_{g,k} + \mathbf{\Gamma}_g r_k$$

an und berechnen Sie anschließend $\mathbf{\Phi}_g$ und $\mathbf{\Gamma}_g$ für das gegebene System.

c) Legen Sie den Parameter k_p so fest, dass für eine Führungsgröße $(r_k) = r_0(1^k)$ die Stellgröße $u_0 = k_p r_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ den gleichen Wert annimmt, der auch auch für $t \to \infty$ zur Einhaltung der Bedingung $y_\infty = r_0$ benötigt wird. 2 P.|

d) Bestimmen Sie die Reglerparameter $\mathbf{k}_x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ und k_I mit Hilfe der Formel von Ackermann so, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ zu liegen kommen. 5 P.|