Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 27.09.2013

LÖSUNG

Aufgabe 1: Lösungen zu Aufgabe 1

a) Segellänge

$$L_s(z) = L - \frac{L}{H} z$$

Moment zufolge Wind

$$M_w = \int_{z=0}^{H} L_s(z) f_w(v_w) z \mathrm{d}z = f_w(v_w) L \frac{H^2}{6}$$

Moment zufolge Auftrieb

$$M_a = (F_{ar} - F_{al}) B = -\rho_w g A 2 B^2 \varphi$$

Moment zufolge Kompensationssystem

$$M_k = (m_l - m_r) g B$$

Drehimpulserhaltung

$$I\ddot{\varphi} = M_w + M_a + M_k = L\frac{H^2}{6}\left(\alpha_0 v_w + \alpha_1 v_w^2\right) - \rho_w g A 2 B^2 \varphi + (m_l - m_r) g B$$

Massenerhaltung für Kompensationstanks

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_l &= -\rho_w \left(\gamma_0 n_p + \gamma_1 n_p^3\right)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_r &= \rho_w \left(\gamma_0 n_p + \gamma_1 n_p^3\right)\end{aligned}$$

Gesamtes nichtlineares System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \omega\\ m_l\\ m_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega\\ \frac{1}{I}\left(L\frac{H^2}{6}\left(\alpha_0 v_w + \alpha_1 v_w^2\right) - \rho_w g A 2 B^2 \varphi + (m_l - m_r) g B\right)\\ -\rho_w \left(\gamma_0 n_p + \gamma_1 n_p^3\right)\\ \rho_w \left(\gamma_0 n_p + \gamma_1 n_p^3\right)\end{bmatrix}$$

$$y = \varphi$$

b) Ruhelagen

$$\begin{aligned}\omega_R &= 0\\ n_{p,R} &= 0\\ m_{l,R} &= \frac{1}{2}\left(m_0 - \frac{LH^2}{6gB}\left(\alpha_0 v_{w,R} + \alpha_1 v_{w,R}^2\right)\right)\\ m_{r,R} &= \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{LH^2}{6gB}\left(\alpha_0 v_{w,R} + \alpha_1 v_{w,R}^2\right)\right)\end{aligned}$$

Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_w A g 2 B^2}{I} & 0 & \frac{gB}{I} & -\frac{gB}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eingangsvektoren

$$\mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho_w \gamma_0 \\ \rho_w \gamma_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{LH^2}{6I}(\alpha_0 + 2\alpha_1 v_{w,R}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ausgangsvektor

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist 3, damit ist das System nicht vollständig beobachtbar.

Um eine nichtbeobachtbare Kombination der Zustände zu finden, muss ein Vektor gefunden werden, welcher nicht durch die ersten drei Zeilen von $\mathcal{O}$ aufgespannt wird. Mögliche Lösung: $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a_4 = 1$, d.h. $\Delta m_l + \Delta m_r$.

Aufgabe 2: Lösungen zu Aufgabe 2

a) Eigenwerte

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -6$$

Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrix und inverse Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformierte Transitionsmatrix

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-6t} \end{bmatrix}$$

Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} - 4\mathrm{e}^{-6t} & 2\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-6t} \\ -2\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{-6t} & -4\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-6t} \end{bmatrix}$$

b) Teil 1: $3(1)^k$: Grenzwertsatz

$$(y_1) = \left(\frac{15}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

Teil 2: $7(0.5^k)$: System ist BIBO-Stabil und es gilt $\lim_{k\to\infty} = 0$. Damit folgt

$$(y_2) = (0)$$

Teil 3:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{I}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{I}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ergebnis mit Betrag und Phase von $G(z)$, ausgewertet bei $z = \mathrm{e}^{\mathrm{I}\pi/4}$

$$(y_3) = \left(10\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}k + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Aufgabe 3:

a) Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$T_{r_1,u_2}(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{40}}$$

b) Bode-Diagram siehe Abb. 1, wobei gilt

$$G_2(s) = \frac{V}{1 + 2\gamma\frac{s}{w_c} + \left(\frac{s}{w_c}\right)^2}$$

mit $w_c = 1$, $\gamma = \frac{3}{4}$ und $V = 10 \equiv 20$ dB und

$$T_{r_1,y_2}(s) = T_{r_1,y_2}(s)G_2(s).$$

c) Der innerere Regelkreis muss im Vergleich zum äußeren Regelkreis eine wesentlich größere Bandbreite ($>$ 1 Dekade) aufweisen; $w_{c,Tr_1,u_2} \gg w_{c,G_2}$.

d) Frequenzkennlinienverfahren für kaskadierten Regelkreis

i Kenngrößen aus Sprungantwort

$$\begin{aligned} \ddot{\mathrm{u}} &= 10\,\% \quad &\Rightarrow \quad &\Phi^\circ = 60^\circ \\ t_r &= 3\,\mathrm{s} \quad &\Rightarrow \quad &w_c = \frac{1}{2} \\ e_\infty &= 0 \end{aligned}$$

ii Reglerstruktur $R_2(s)$

$$R_2(s) = V\frac{(1+s^\rho T)}{s^\rho}$$

Für stationäre Genauigkeit bei Aufschaltung eines Sprungs $\sigma(t)$ wird ein Pol bei $s = 0$ benötigt, d.h. $\rho = 1$.

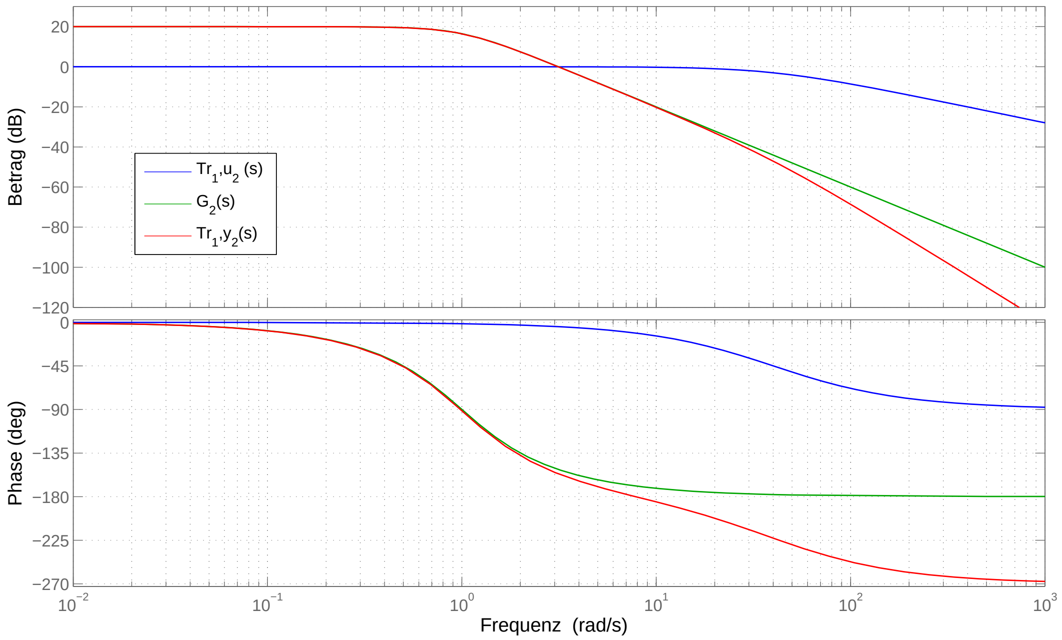

Abbildung 1: Bode Diagram zu Aufgabe 3 b)

iii Frequenzkennlinienverfahren

$$T = 2\left(2-\sqrt{3}\right), \quad V = \frac{3\sqrt{2}}{160\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Aufgabe 4:

a) Erreichbarkeit des erweiterten Systems

$$\mathbf{\Phi}_e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Erreichbarkeitsmatrix hat vollen Rang ($\det(\mathcal{R}) = 1 \neq 0$) weshalb das erweiterte System vollständig erreichbar ist.

b) Geschlossener Regelkreis

$$\mathbf{\Phi}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\left(\mathbf{k}_x - k_p\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right) & \mathbf{\Gamma}k_I \\ -\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k_1 - k_p & k_2 - 2 & k_I \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}k_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Parameter k_p

$$k_p = 6$$

d) Reglerparameter aus Formel von Ackermann

$$k_1 = \frac{17}{4}, \quad k_2 = \frac{7}{2}, \quad k_I = \frac{1}{8}$$