

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
 VU Automatisierung am 31.01.2014

LÖSUNG

Aufgabe 1:

Lösungen zu Aufgabe 1a:

- Mathematisches Modell in Zustandsdarstellung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ v \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{1}{m} \left(\frac{ku_c^2}{2z^2} - cz \right) \\ \frac{z}{kR} (u - u_c) + \frac{u_c v}{z} \end{bmatrix}$$

$$y = z$$

- Ruhelagen

$$z_R = z_0$$

$$v_R = 0$$

$$u_0 = u_{c,R} = \sqrt{\frac{2cz_0^3}{k}}$$

Linearisiertes System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3c}{m} & 0 & -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{2ck}{z_0}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2cz_0}{k}} & \frac{z_0}{kR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{z_0}{kR} \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta u_c \end{bmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 1b:

- Zeitdiskrete Systemdarstellung

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{T_a} - 1 \\ 0 & e^{T_a} \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} e^{T_a} - 1 - T_a \\ e^{T_a} - 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

- Das zeitdiskrete System ist für eine Abtastzeit $T_a > 0$ immer beobachtbar, da die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(c, \Phi)$ immer vollen Rang hat.

$$\det(\mathcal{O}(c, \Phi)) = e^{T_a} - 1$$

Aufgabe 2:

Lösungen zu Aufgabe 2a

- Übertragungsfunktion des Gesamtsystems

$$G(s) = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} = \frac{(s-2)(s+4)}{(s+3)(s^2 + 4s - 4 + \alpha)}$$

- Damit $G(s)$ BIBO-stabil ist, muss $\alpha > 4$ gelten.

Lösungen zu Aufgabe 2b

- Übertragungsfunktion des Abtastsystems

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{2} \frac{z+1}{z^2}$$

- Das System ist BIBO-stabil (Polstelle $z = 0$) aber nicht sprungfähig (Zählergrad $<$ Nennergrad)
- Sprungantwort

$$h_k = \frac{1}{2} (\sigma_{k-1} + \sigma_{k-2})$$

Aufgabe 3: Lösungen zu Aufgabe 3

- a) i. FKL-Reglerentwurf

$$R(s) = \frac{V(1 + sT_I)}{s} \quad (1)$$

mit

$$T_I = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad V = \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{3}}} \quad (2)$$

- ii. geschlossene Kreis stabil wenn Nullstellen von $1 + R(s)G(s)$ in linker offener Halbebene
 \rightarrow Hurwitzpolynom 2. Ordnung

$$a > -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} \quad (3)$$

- b) Totzeitglied ändert nur Phase $\rightarrow \Delta\varphi_{max} = -\pi/3$

$$T_{t,max} = \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

- c) exakte Störgrößenkompensation: $T_{d,y} = 0$

$$R_d(s) = \frac{G_d(s)}{G(s)} \quad (5)$$

Aufgabe 4: Lösungen zu Aufgabe 3

- a) Das System ist nicht asymptotisch stabil.

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm j3 \quad (6)$$

b) System muss vollständig erreichbar sein.

Mit der Bedingung $c \in \mathbb{R}$ ist das System nur für den Wert

$$c = 0 \tag{7}$$

nicht vollständig erreichbar.

c) Der Zustandsreglerentwurf nach Ackermann liefert

$$\mathbf{k}^T = [2 \quad 5 \quad -5]. \tag{8}$$

Die Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises ergibt sich zu

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 6 & 11 & -10 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

d) Die reelle Jordan-Form lautet

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

mit der zugehörigen Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \operatorname{Re}(\mathbf{v}_2) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{v}_2)] \tag{11}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$