Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 07.03.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	9	10	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können:

☐ Fr., 14.03.2014 ☐ Mo., 17.03.2014

Viel Erfolg!

1. Die folgenden beiden Punkte können unabhängig voneinander gelöst werden. 10 P.|

   a) Gegeben sind die folgenden Zustandsdifferentialgleichungen einer elektrischen Schaltung 7 P.|

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2u_1 - u_C - u_2 - 2R_1 i_L}{CR_2} \qquad u_C(0) = u_{C,0} \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{u_1 - R_1 i_L}{L} \qquad i_L(0) = i_{L,0} \tag{1b}$$

   mit den beiden Eingängen u_1 und u_2 sowie dem Ausgang i_L.

      i. Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\phi(t)$ des linearen Systems für die Parameterwerte $R_1 = 1, R_2 = 1, C = 1, L = 1$ mithilfe der Laplace-Transformation. 3 P.|

      ii. Geben Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ für das System (1) an. 1 P.|

      iii. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Zustände u_C und i_L für den Eingang $u_1 = 2\sigma(t)$ sowie $u_2 = 0$ und den Anfangszuständen $u_{C,0} = i_{L,0} = 0$. 3 P.|

   b) Gegeben ist das folgende nichtlineare System 3 P.|

$$\dot{x} = u(t)e^{-3x(t)}. \tag{2a}$$

   Ausgehend vom Anfangszustand $x(0) = 0$ bewegt sich das System mit der Eingangsgröße

$$\tilde{u}(t) = t \tag{2b}$$

   auf der Trajektorie

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}t^2 + 1\right). \tag{2c}$$

   Linearisieren Sie das System um diese Trajektorie und geben sie das linearisierte System an.

2. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich! 9 P.|

   a) Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} u_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \end{aligned} \tag{3}$$

   Die nachfolgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

      i. Welche Bedingungen müssen Γ_1 und Γ_2 erfüllen, damit (3) vollständig erreichbar ist? 1 P.|

      ii. Geben Sie das zu (3) duale System an. Zeigen Sie allgemein, dass die vollständige Erreichbarkeit eines linearen, zeitinvarianten primalen Eingrößensystems äquivalent zur vollständigen Beobachtbarkeit des zugehörigen dualen Systems ist. 1.5 P.|

      iii. Angenommen (3) wäre mit geeigneten c_1 und c_2 vollständig beobachtbar. Würde der Einsatz eines trivialen Beobachters auf eine asymptotisch stabile Fehlerdynamik führen? 1 P.|

      iv. Es sei $\Gamma_1 = 0$ und $\Gamma_2 = 1$. Entwerfen Sie einen Zustandsregler so, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0.5$ zu liegen kommen. 2 P.|

   b) Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_u u_k + \mathbf{\Gamma}_w w_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k, \end{aligned} \tag{4}$$

   für das sich ohne Störung ($w_k \equiv 0$) durch die Zustandsrückführung

$$u_k = \mathbf{k}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k \tag{5}$$

   ein asymptotisch stabiles geschlossenes System ergibt. Leiten Sie für das System (4), unter Annahme von $w_{k+1} = w_k \neq 0$, einen Störgrößenbeobachter sowie eine Störunterdrückung allgemein her.

      i. Erweitern Sie das System (4) um den Zustand w_k. Schreiben Sie, unter der Annahme, dass das erweiterte System vollständig beobachtbar ist, den zugehörigen vollständigen Luenbergerbeobachter sowie die Dynamik des Fehlersystems $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x,k}^{\mathrm{T}} & e_{w,k} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ mit $\mathbf{e}_{x,k} = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ und $e_{w,k} = \hat{w}_k - w_k$ allgemein an. Verwenden Sie hierzu die Aufteilung $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_x^{\mathrm{T}} & \hat{k}_w \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 1.5 P.|

      ii. Das Regelgesetz (5) wird nun auf $u_k = \mathbf{k}_x^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}_k + k_w\hat{w}_k$ abgeändert. Setzen Sie dieses Regelgesetz in die Systemgleichung ein und schreiben Sie die Dynamik des gesamten geschlossenen Systems in den Zuständen $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} & w_k & \mathbf{e}_{x,k}^{\mathrm{T}} & e_{w,k} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ an. Wenn $\mathbf{e}_{x,k} = \mathbf{0}$ und $e_{w,k} = 0$ ideal erfüllt wären, welche Bedingung müsste erfüllt sein, damit w_k überhaupt keinen Einfluss auf $\mathbf{x}_k$ hätte? 2 P.|

3. Gegeben ist die Impulsantwort eines diskreten Systems 10 P.|

$$(g_k) = (0, 2, 2, 0, 0, 0, \ldots), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

a) Geben Sie die Minimalrealisierung des Systems in der Steuerbarkeitsnormalform an. 3 P.|

b) Schalten Sie zwei solcher Systeme in Serie und berechnen Sie die Impulsantwort des Gesamtsystems $g_{\text{ges},k}$. 2 P.|

c) Berechnen und zeichnen Sie die Sprungantwort der Serienschaltung. 2 P.|

d) Die Minimialrealisierung des Systems aus Punkt 3a) wird mit einem P-Regler nach Abbildung 1 geregelt. In welchem Bereich darf der Verstärkungsfaktor P des P-Reglers liegen, damit der geschlossene Kreis stabil bleibt? 3 P.|

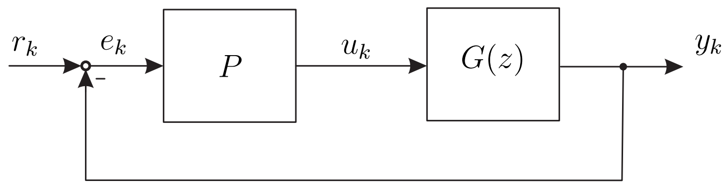


Abbildung 1: Regelkreis.

Rechenhinweis, falls benötigt: $(1 - 4x^2)^2 = (1 - 2x)^2(1 + 2x)^2$

4. Gegenstand der nachfolgenden Teilaufgaben ist der in Abbildung 2 dargestellte Regelkreis. Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich! 11 P.|
Hinweis: Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden.

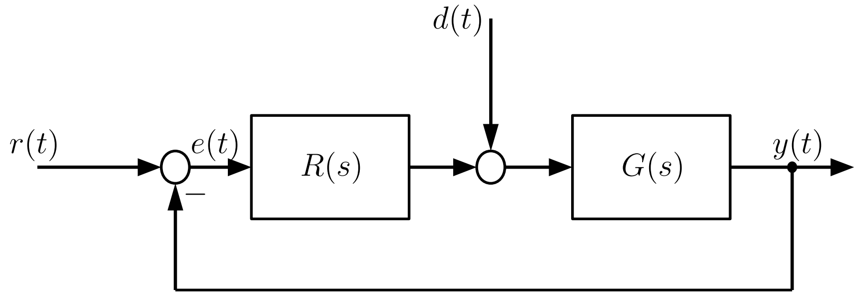


Abbildung 2: Standardregelkreis.

a) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10^3\,(s+10)}{(s-1)\,(s+100)}. \tag{7}$$

i. Zeichnen Sie das zugehörige Bode-Diagramm in der beiliegenden Vorlage ein. Zeichnen Sie insbesondere auch Durchtrittsfrequenz und Phasenreserve ein. Lassen sich hieraus Aussagen über die BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises (für $R(s) = 1$) ableiten? 3 P.|

ii. Eine reale Strecke werde in einem gewissen Arbeitsbereich durch die Übetragungsfunktion $G(s)$ gemäß (7) modelliert. Nun könnte man auf die Idee kommen, den Regelkreis offen zu betreiben (Steuerung) und den instabilen Pol mittels 0.5 P.|

$$R(s) = \frac{V_R\,(s-1)}{(1+sT_R)} \tag{8}$$

zu kürzen. Wäre damit im betrachteten Arbeitsbereich zuverlässig und dauerhaft mit der Stabilität des realen offenen Regelkreises zu rechnen?

b) Es sei eine Strecke durch die Übertragungsfunktion 2.5 P.|

$$G(s) = \frac{0.01}{\left(1 + 2\frac{5}{4}\left(\frac{s}{98}\right) + \left(\frac{s}{98}\right)^2\right)\left(1 + 2\frac{3}{5}\left(\frac{s}{5}\right) + \left(\frac{s}{5}\right)^2\right)} \tag{9}$$

gegeben. Um zwei der Pole von $G(s)$ zu kürzen, wird für dieses System ein Kompensationsregler der Form

$$R(s) = \frac{V_R z_R(s)}{s^\rho\,(1+sT_R)^\gamma} \tag{10}$$

angesetzt. Wie ist das Zählerpolynom $z_R(s)$ zu wählen, wenn man mittels FKL-Verfahren einen geschlossenen Kreis mit möglichst kleiner Anstiegszeit t_r implementieren möchte? Begründen Sie Ihre Wahl! Welche Bedeutung kommt dem Nennerpolynom von $R(s)$ allgemein zu? Welche Bedingung muss dabei $\rho + \gamma$ in diesem Zusammenhang erfüllen? Wie sollte T_R im Allgemeinen gewählt werden?

c) Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises habe die Form 2 P.|

$$L(s) = \frac{V}{s^\rho} \frac{z_L(s)}{n_L(s)} \exp(-sT_t) \tag{11}$$

und erfülle die Bedingungen aus Satz 4.6 (siehe Formelsammlung). Welche bleibende Regelabweichung e_∞ ergibt sich für $r(t) = \sigma(t)$ und $r(t) = t$ unter der Voraussetzung, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist und $\rho = 0$ gilt?

d) Legen Sie bei gegebener Strecken-Übertragungsfunktion 3 P.|

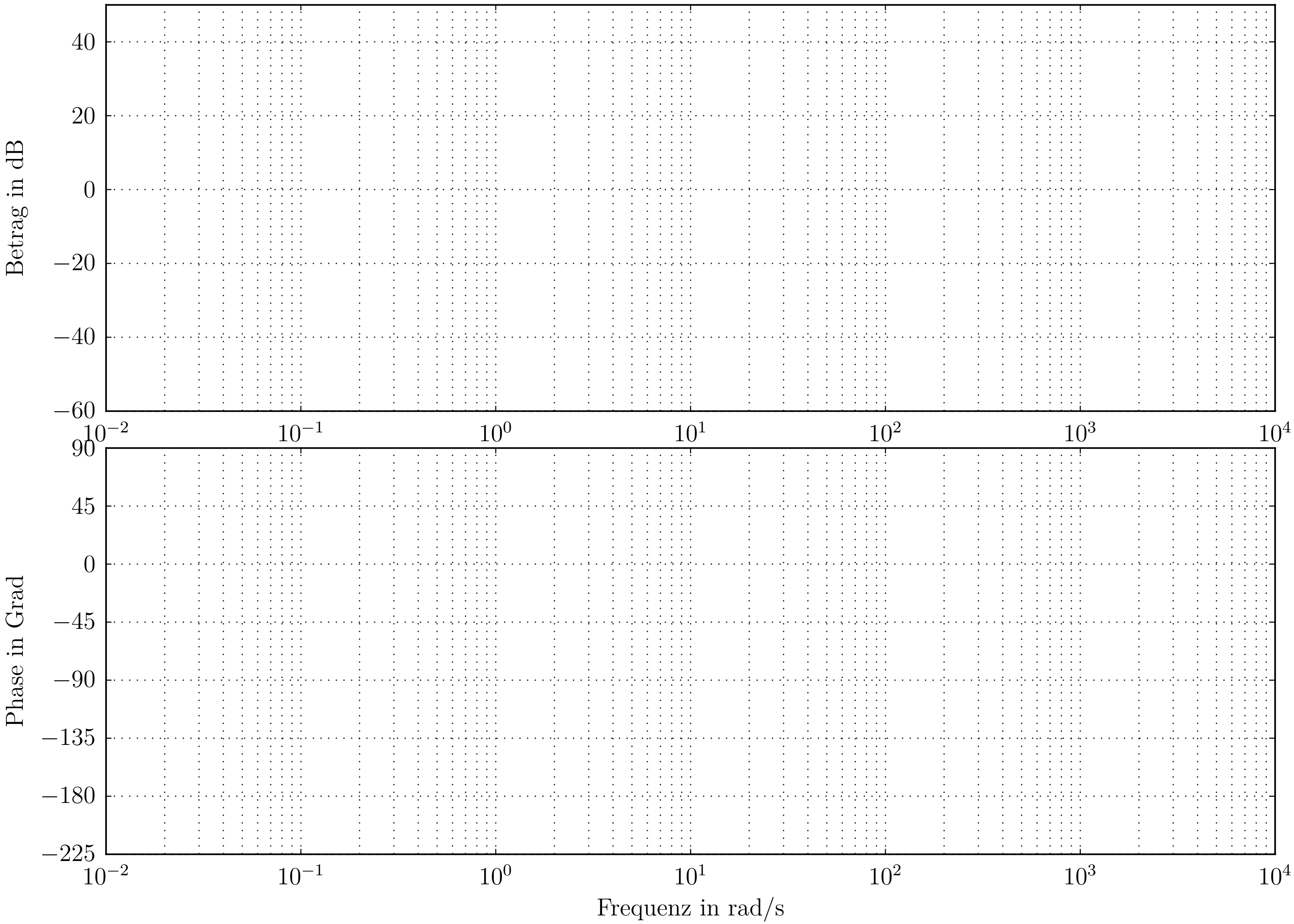
$$G(s) = \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(1 + s\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right) z_R(s)} \tag{12}$$

die Paramter V_R, ρ und T_R des Kompensationsreglers

$$R(s) = \frac{V_R z_R(s)}{s^\rho \left(1 + sT_R\right)} \tag{13}$$

mithilfe des FKL-Verfahrens so fest, dass der geschlossene Regelkreis die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Anstiegszeit: $t_r = 0.5s$
- Überschwingen: ü $= 10\%$
- Bleibende Regelabweichung: $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$


Betrag in dB
40
20
0
−20
−40
−60
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3} 10^{4}
Phase in Grad
90
45
0
−45
−90
−135
−180
−225
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3} 10^{4}
Frequenz in rad/s