Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 07.03.2014

LÖSUNG

Aufgabe 1: Lösungen zu Aufgabe 1

a) Mathematisches Modell in Zustandsdarstellung

i Transitionsmatrix

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \exp(-t) & -2t\exp(-t) \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix}$$

ii Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

iii Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} i_L &= 2(1-\exp(-t)) \\ u_C &= 4t\exp(-t) \end{aligned}$$

b) Linearesiertes System

$$\Delta\dot{x} = -\frac{3t}{1+\frac{3}{2}t^2}\Delta x + \frac{1}{1+\frac{3}{2}t^2}\Delta u$$

Aufgabe 2: Lösungen zu Aufgabe 2

a) Zeitdiskretes System in Zustandsdarstellung

i Bedingungen an Γ_1 und Γ_2 für vollständige Erreichbarkeit des Sytems

$$\Gamma_2 \neq 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_1 \neq -\frac{\Gamma_2}{2}.$$

ii Duales System und Beweis, dass vollständige Erreichbarkeit des primalen Systems äquivalent zur vollständigen Beobachtbarkeit des dualen Systems ist

- Duales System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{d,k+1} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u_k \\ y_{d,k} &= \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k}. \end{aligned}$$

- Beweis der Äquivalenz

$$\underbrace{\begin{aligned}\mathbf{x}_{p,k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{p,k} + \mathbf{\Gamma}u_k \\ y_{p,k} &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{p,k} + du_k\end{aligned}}_{\text{primales System}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{aligned}\mathbf{x}_{d,k+1} &= \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{d,k} + \mathbf{c}u_k \\ y_{d,k} &= \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{d,k} + du_k\end{aligned}}_{\text{duales System}}$$

Erreichbarkeitsmatrix des primalen Systems: $\mathcal{R}_p\left(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}\right) = \left[\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Phi}^2\mathbf{\Gamma}, \ldots, \mathbf{\Phi}^{n-1}\mathbf{\Gamma}\right]$

Beobachtbarkeitsmatrix des dualen Systems: $\mathcal{O}_d\left(\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}, \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\right) = \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\right)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\end{bmatrix}$

Es gilt $\mathcal{R}_p = \mathcal{O}_d^{\mathrm{T}}$.

iii Trivialer Beobachter: Die Dynamik des Beobachtungsfehler ist nur dann stabil, wenn die Strecke stabil ist.

iv Der Rückführungsvektor ergibt sich zu $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}-6 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$.

b) Zeitdiskretes System in Zustandsdarstellung

i Erweiterung des Systems um Zustand w_k, vollständiger Luenbergerbeobachter und Dynamik des Fehlersystems

- Erweitertes System

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k+1} \\ w_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma}_w \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k \\ w_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} \\ 0\end{bmatrix} u_k.$$

- Vollständiger Luenbergerbeobachter

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{w}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma}_w \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{w}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} \\ 0\end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{x}} \\ \hat{k}_w\end{bmatrix}\left(\hat{y}_k - y_k\right) \quad \text{mit} \quad \hat{y}_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}_k.$$

- Dynamik des Fehlersystems

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_{\mathbf{x},k+1} \\ e_{w,k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{x}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}_w \\ \hat{k}_w\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_{\mathbf{x},k} \\ e_{w,k}\end{bmatrix}.$$

ii Dynamik des geschlossenen Systems

- Dynamik des geschlossenen Systems

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{w}_{k+1} \\ \mathbf{e}_{\mathbf{x},k+1} \\ e_{w,k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}_u\mathbf{k}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}_w + \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}k_w & \Gamma_u\mathbf{k}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}_u k_w \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{x}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}_w \\ \mathbf{0} & 0 & \hat{k}_w\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k \\ w_k \\ \mathbf{e}_{\mathbf{x},k} \\ e_{w,k}\end{bmatrix}.$$

- Bedingung, damit w_k für $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ keinen Einfluss auf $\mathbf{x}$ hat

$$\mathbf{\Gamma}_w + \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}k_w = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 3: Lösungen zu Aufgabe 3

a) Minimalrealisierung in Steuerbarkeitsnormalform

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + 0 u_k$$

b) Impulsantwort Gesamtsystem

$$g_{ges,k} = 4\delta_{k-2} + 8\delta_{k-3} + 4\delta_{k-4}$$

c) Sprungantwort Gesamtsystem

$$h_{ges,k} = 4\sigma_{k-2} + 8\sigma_{k-3} + 4\sigma_{k-4}$$

d) Bereich Verstärkungsfaktor p für Stabilität

$$-\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4: Lösungen zu Aufgabe 4

a) Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Systems

i Bode-Diagramm siehe Abb. 1, wobei das Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung (Satz 4.6 Skriptum Automatisierung) für $R(s) = 1$ nicht zur Beurteilung der BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises herangezogen werden kann, da das Nennerpolynom von $L(s) = R(s)G(s)$ kein Hurwitzpolynom und der Verstärkungsfaktor $V < 0$ ist.

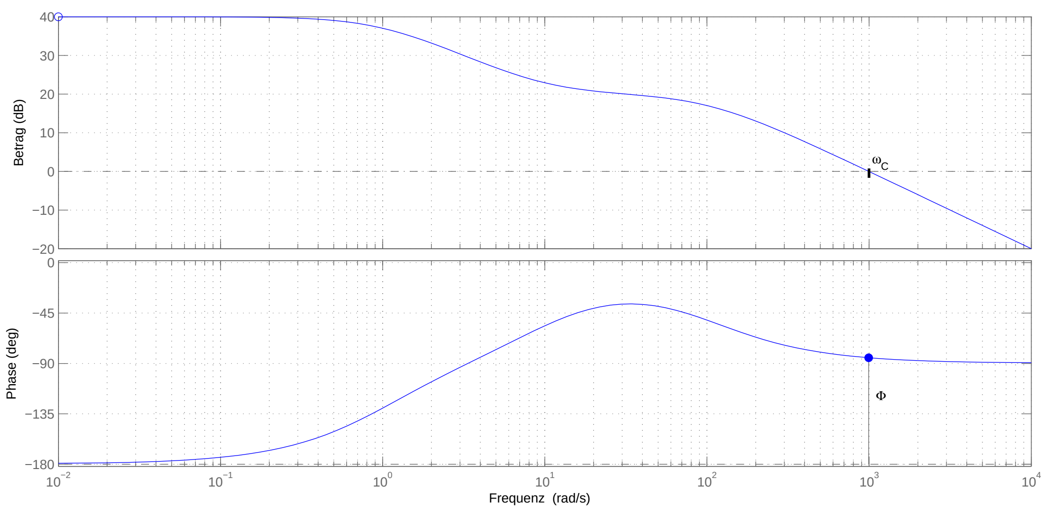

Abbildung 1: Bode Diagramm zu Aufgabe 4 a)

ii Bei Betrieb als offener Regelkreis ist das System nicht intern stabil. Selbst wenn keine Störung vorhanden wäre ($d(t) = 0$), wäre es praktisch unmöglich (Veränderung der Streckenparameter, Vereinfachungen bei der Modellbildung, ...) den instabilen Pol exakt zu kürzen, so dass das System auch in diesem Fall nicht BIBO-Stabil wäre. Die Steuerung kann nur für stabile Strecken angewandt werden!

b) Die Übertragungsfunktion lässt sich in Form von

$$G(s) = \frac{10^{-2}}{\left(1+\frac{s}{49}\right)\left(1+\frac{s}{196}\right)\left(1+2\frac{3}{5}\frac{s}{5}+\left(\frac{s}{5}\right)^2\right)}$$

mit den Knickfrequenzen $\omega_{n,1} = 49$ rad/s, $\omega_{n,2} = 196$ rad/s und $\omega_{n,3} = 5$ rad/s schreiben. Für eine möglichst kleine Anstiegszeit wird $z_R(s) = 1 + 2\frac{3}{5}\frac{s}{5} + \left(\frac{s}{5}\right)^2$ gewählt, da dieser Term für die niedrigste Knickfrequenz verantwortlich ist. Das Nennerpolynom von R(s) muss die Realisierbarkeit des Reglers sicherstellen, wofür im vorliegenden Fall $\rho + \gamma \geq 2$ erfüllt sein muss. Weiters stellen ρ und T_R Entwurfsfreiheitsgrade für das FKL-Verfahren (bleibende Regelabweichung, Phasenreserve) dar. Um von der Kompensation der langsamen Komponenten zu profitieren, muss $T_R < \frac{1}{\omega_{n,3}}$ sein, wobei T_R aber auch nicht beliebig klein gewählt werden kann (Stellgrößenbeschränkungen, Spektrum des Sensorrauschens).

c) Bleibende Regelabweichungen

$$\begin{aligned} r(t) &= \sigma(t): \quad & e_\infty &= \tfrac{1}{1+V}, \\ r(t) &= t: \quad & e_\infty &= \infty. \end{aligned}$$

d) Entwurf eines Kompensationsreglers

$$\rho = 1, \quad T_R = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \quad \text{und} \quad V_R = 3.$$