Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 09.05.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	10	10	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten: ☐ Fr., 16.05.2014 ☐ Mo., 19.05.2014 ☐ Fr., 23.05.2014

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe wird das in Form eines Blockschaltbildes dargestellte, nichtlineare System 3. Ordnung aus Abbildung 1 betrachtet. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. 9 P.|

   a) Leiten Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ aus dem Blockschaltbild her. Achten Sie dabei auf die Wahl geeigneter Zustandsgrößen. Bestimmen Sie außerdem die Ausgangsgleichung $y = h(\mathbf{x})$. 2 P.|

      Hinweis: Sie können die Beschreibung im Zeitbereich direkt aus dem Blockschaltbild ableiten.

   b) Bestimmen Sie für $u = 0$ sämtliche Ruhelagen des Systems. 3 P.|

   c) Linearisieren Sie das System um die eindeutig bestimmte Ruhelage, die sich für $u = 0$ und $y = -\pi$ einstellt und bestimmen Sie die linearisierte Systemdarstellung in der Form 2.5 P.|

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$$
$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}.$$

   d) Ist das in Teilaufgabe c) erhaltene linearisierte System vollständig erreichbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 1.5 P.|

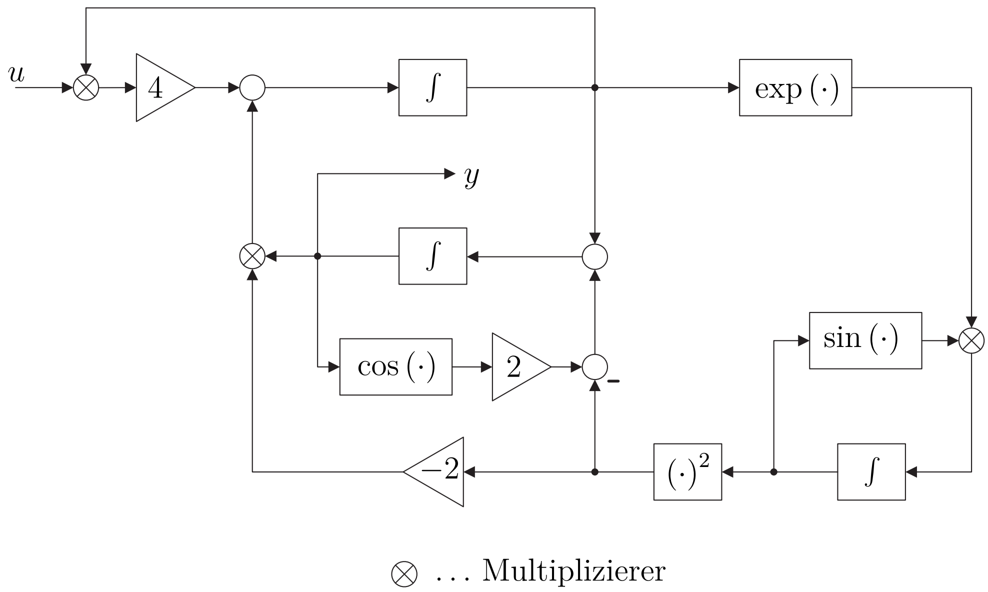

Abbildung 1: Blockschaltbild des betrachteten Systems.

2. Bearbeiten Sie folgende voneinander unabhängige Teilaufgaben a) und b). 10 P.|

   a) Abbildung 2 zeigt die Polstellen des mittels einer Zero-Order-Hold Diskretisierung erhaltenen Abtastsystems von

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{1}$$

      i. Gehen Sie davon aus, dass die Abtastzeit T_a so klein gewählt wurde, dass damit sämtliche Zeitkonstanten des Systems ausreichend gut aufgelöst werden. Bestimmen Sie für eine allgemeine Abtastzeit T_a die Polstellen des dem Abtastsystem zu Grunde liegenden zeitkontinuierlichen Systems und leiten Sie daraus die reelle Jordansche Normalform von (1) ab. 3 P.|

      ii. Berechnen Sie die Pole des Abtastsystems, wenn die Abtastzeit auf die Hälfte reduziert wird und zeichnen Sie diese näherungsweise in das Diagramm in Abbildung 2 ein. 1 P.|

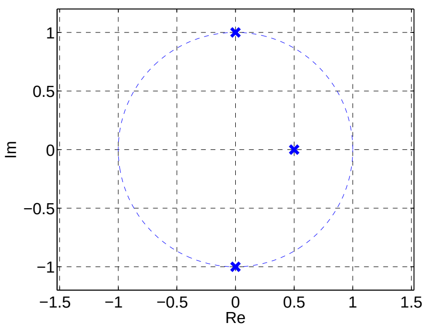

Abbildung 2: Polstellen des Abtastsystems.

   b) Eine Möglichkeit der Überführung eines nichtlinearen autonomen Differenzialgleichungssystems der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in eine zeitdiskrete Darstellung besteht in der Anwendung des impliziten Eulerverfahrens. Die Iterationsvorschrift für diese näherungsweise Diskretisierung mit der Abtastzeit $T_a > 0$ lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_a \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}).$$

   Für die folgenden Teilaufgaben sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

   Hinweis für die folgenden Unterpunkte: Ist $\mu \neq 0$ Eigenwert einer regulären Matrix $\mathbf{M}$, so ist μ^{-1} Eigenwert der inversen Matrix $\mathbf{M}^{-1}$.

      i. Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}$ des mit Hilfe des impliziten Eulerverfahrens erhaltenen Abtastsystems. 1 P.|

      ii. Leiten Sie eine allgemeine Transformationsvorschrift für die Eigenwerte $\tilde{\lambda}$ des Abtastsystems, welche Lösung von $\det\left(\mathbf{\Phi} - \tilde{\lambda}\mathbf{E}\right) = 0$ sind, in Abhängigkeit der Eigenwerte λ der zeitkontinuierlichen Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ her. 3 P.|

      iii. Beurteilen Sie die globale asymptotische Stabilität des Abtastsystems in Abhängigkeit der Abtastzeit T_a für 2 P.|

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Gegeben sind zwei unterschiedliche Anfangszustände eines autonomen zeitkontinuierlichen LTI Systems mit $\dim(\mathbf{x}) = 2$ und den sich ergebenden Ausgangssignalen 10 P.|

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y(t) = e^{-2t}\left(\cos(t) + \sin(t)\right) \tag{2}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad y(t) = e^{-2t}\left(-\cos(t) + \sin(t)\right) \tag{3}$$

a) Berechnen Sie den Ausgangsvektor $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ aus (2) und (3). 2 P.|

b) Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems. 8 P.|

Hinweis: Sie können die Aufgabe sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich lösen.

4. Die Teilaufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. 11 P.|

a) Gegeben ist ein LTI System der Dimension $n = 3$ der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

i. Berechnen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix und treffen Sie anhand dieser eine Aussage über die Stabilität des Systems. 1.5 P.|

ii. Überprüfen Sie das System mithilfe des PBH-Rangtests auf vollständige Erreichbarkeit. 1 P.|

iii. Ermitteln Sie einen Zustandsrückführungsvektor $\mathbf{k}$ für $u = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. Dabei sollen die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -3$ zu liegen kommen. 3 P.|

iv. Die Zustandsrückführung wird um eine Referenzgröße $r(t)$ in der Form $u = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + r(t)$ erweitert. Ermitteln sie $r(t)$ so, dass eine Trajektorienfolge 3 P.|

$$\mathbf{x}(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^d(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\sin(2t) \\ -e^{-t}\sin(2t) + 2e^{-t}\cos(2t) \\ e^{-t}\sin(2t) - 2e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\cos(2t) - 4e^{-t}\sin 2t \end{bmatrix}$$

realisiert wird.

b) Betrachtet wird ein zeitkontinuierliches, autonomes LTI-System 2. Ordnung. Kann es eine Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ geben, so dass das System genau 2 Ruhelagen besitzt? Wenn JA, geben Sie ein mögliches Beispiel an, wenn NEIN begründen Sie Ihre Antwort ausführlich. 1 P.|

c) Betrachtet wird ein lineares zeitinvariantes System der Form 1.5 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u. \tag{4}$$

Kann eine Kombination $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ existieren, so dass das System mit $u = u_R \neq 0$ keine Ruhelage besitzt? Wenn JA, geben Sie eine Beispielkombination für $\dim(\mathbf{x}) = 2$ an, wenn NEIN begründen Sie Ihre Aussage ausführlich.