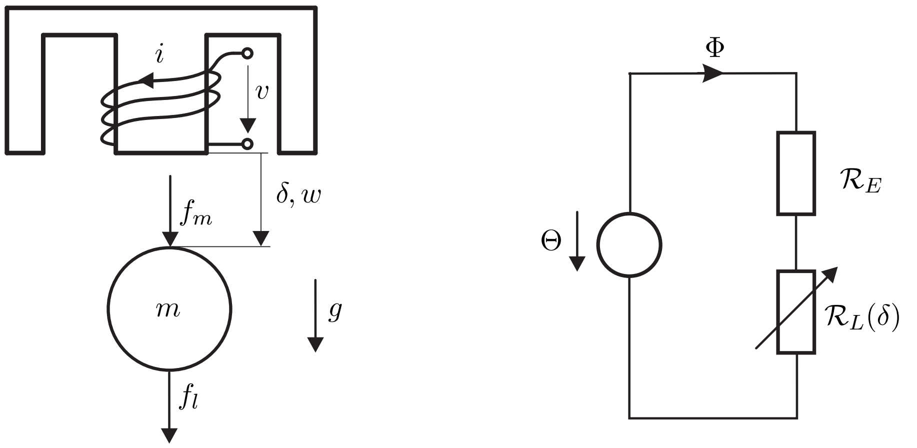
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 1
VU Automatisierung - WS13/14

Beispiel 1: Abbildung 1(a) zeigt die Prinzipskizze einer eindimensionalen magnetischen Lagerung. Ein Elektromagnet wird dabei mit einer Spannung v versorgt, welche einen Strom i und damit eine Magnetkraft f_m auf das zu lagernde Objekt zur Folge hat. Auf das zu lagernde Objekt der Masse m wirken die Gewichtskraft und eine äußere Lastkraft f_l. Der Luftspalt zwischen Elektromagnet und Objekt ist mit δ bezeichnet und die Geschwindigkeit des Objekts mit w. Ferner ist in Abbildung 1(b) das magnetische Ersatzschaltbild für den magnetischen Fluss Φ dargestellt. Es besteht aus einer Durchflutungsquelle $\Theta = Ni$, wobei N die Anzahl der Windungen bezeichnet, einer konstanten Eisenreluktanz $\mathcal{R}_E = p_1$ und einer luftspaltabhängigen Reluktanz $\mathcal{R}_L(\delta) = p_2\,\delta$ mit den Konstanten p_1 und p_2.



(a) Prinzipskizze (b) Magnetisches Ersatzschaltbild

Abbildung 1: Prinzipskizze der eindimensionalen Magnetlagerung und magnetisches Ersatzschaltbild.

Für die Induktivität gilt

$$L_G(\delta) = \frac{N^2}{\mathcal{R}_G(\delta)} \tag{1}$$

wobei $\mathcal{R}_G(\delta)$ die Ersatzreluktanz des Magnetkreises gemäß Abbildung 1(b) bezeichnet. Für die Magnetkraft gilt

$$f_m = \frac{1}{2}\frac{\partial L_G(\delta)}{\partial \delta} i^2. \tag{2}$$

a) Geben Sie das Gesamtmodell der magnetischen Lagerung in der nichtlinearen Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3a}$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{3b}$$

an. Wählen Sie dafür geeignete Zustandsgrößen $\mathbf{x}$. Der Eingangsvektor sei $\mathbf{u} = [v \; f_l]^T$ und für den Ausgang gelte $y = i$.

Hinweis: *Für das elektrische Teilsystem des gegebenen Systems gilt* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = -Ri + v$*, wobei* $\psi = L_G(\delta)i$ *den verketteten Fluss und* R *den elektrischen Widerstand der Spule des Elektromagneten bezeichnen.*

b) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Systems für konstante Eingangsgrößen $\mathbf{u}_R = [v_R \; f_{l,R}]^T$.

Angenommen $\delta_R = \overline{\delta}$ sei eine gewünschte Ruhelage des Systems für $f_{l,R} = 0$. Bestimmen Sie dann v_R so, dass $\delta_R = \overline{\delta}$ eine Ruhelage des Systems darstellt.

c) Linearisieren Sie das nichtlineare Zustandsmodell um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ und geben Sie es in der Zustandsdarstellung

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} \tag{4a}$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u} \tag{4b}$$

an.

Beispiel 2: Eine Kugel (Radius $R > 0$, Masse $m > 0$) schwimmt in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht ρ (siehe Abbildung 2). Auf die Kugel wirkt eine äußere Kraft F und die Gra-

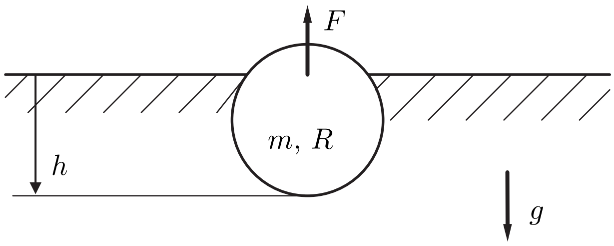


Abbildung 2: Schwimmende Kugel

vitationskraft mit der Gravitationskonstanten g. Es werden nur jene Werte der Parameter und der Kraft betrachtet, für welche die Eintauchtiefe h im Bereich $0 < h < 2R$ liegt. Strömungseffekte werden vernachlässigt.

a) Ermitteln Sie das zugehörige mathematische Modell der Form (3) mit geeigneten Zustandsgrößen $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße $y = h$.

Hinweis: *Die Auftriebskraft eines Körpers mit dem eingetauchten Volumen* V *beträgt* $\rho V g$*, wobei das eingetauchte Volumen, wie in Abbildung 3 dargestellt, mit* $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ *angesetzt wird.*

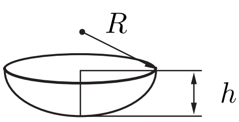


Abbildung 3: Hilfsgrößen zur Bestimmung des eingetauchten Volumens

b) Bestimmen Sie jenen Wert der Kraft F_R, bei dem die Eintauchtiefe der Kugel in der Ruhe $h_R = \frac{R}{3}$ beträgt und bringen Sie das mathematische Modell durch Linearisierung um diese Ruhelage in die Form (4).

Beispiel 3: Gegeben ist das elektrische System nach Abbildung 4. Die darin verwendete Induktivität ist eine Funktion des Stroms $L = L(i_L)$ und die Kapazität ist von der Spannung u_C abhängig, d.h. $C = C(u_C)$. Der Operationsverstärker kann bei der Modellierung als ideal angesehen werden. Weiterhin ist der Ausgang der Schaltung u_C unbelastet, d.h. es fließt kein Strom aus den Klemmen.

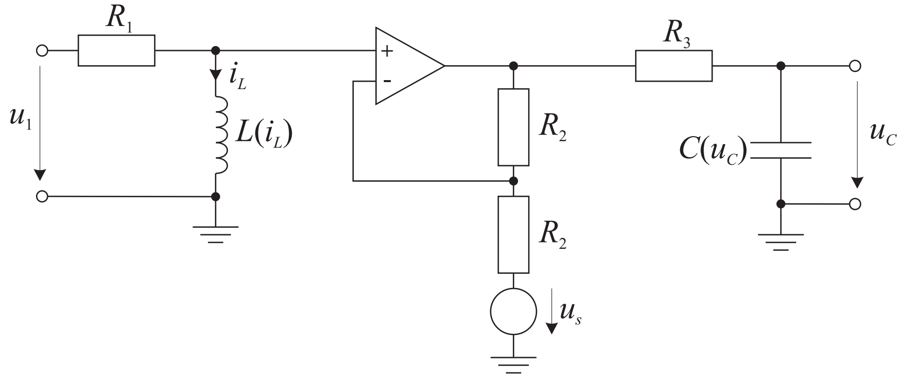


Abbildung 4: Elektrisches System

a) Berechnen Sie das mathematische Modell des elektrischen Netzwerkes nach Abbildung 4 in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_1, u_s) \\ y &= g(\mathbf{x}, u_1, u_s), \end{aligned}$$

mit dem Eingang u_1, der Störung u_s und dem Ausgang $y = u_C$. Wählen Sie dazu geeignete Zustandsgrößen und berücksichtigen Sie die Abhängigkeiten der Induktivität $L(i_L)$ bzw. Kapazität $C(u_C)$ in allgemeiner Form.

b) Im Folgenden gilt

$$\begin{aligned} L(i_L) &= L_0 + L_1 i_L^2 \\ C(u_C) &= C_0 + C_1 \left(1 - e^{-\frac{u_C}{u_{C0}}}\right), \end{aligned}$$

mit den konstanten, positiven Parametern L_0, L_1, C_0, C_1 und u_{C0}. Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u_s = 0$ und $u_1 = \text{konst.}$