Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 1 — Lösungen
VU Automatisierung - WS13/14

Beispiel 1:
Das mathematische Modell der Magnetlagerung lautet mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\psi, \delta, w]^T$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} -\frac{R(p_1+p_2\delta)}{N^2}\psi + v \\ w \\ -\frac{1}{2}\frac{p_2}{N^2 m}\psi^2 + g + \frac{f_l}{m} \end{pmatrix} \\
y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{p_1 + p_2\delta}{N^2}\psi.
\end{aligned}
$$

Die Ruhelagen des Systems berechnen sich zu

$$
\begin{aligned}
\psi_R &= \pm\sqrt{\frac{2N^2}{p_2}(mg + f_{l,R})} \\
\delta_R &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{v_R N^2}{R\psi_R} - p_1\right) \\
w_R &= 0.
\end{aligned}
$$

Damit für $f_{l,R} = 0$ die Position $\delta_R = \overline{\delta}$ eine Ruhelage des Systems darstellt, muss die Spannung zu

$$
v_R = \pm\frac{p_2\overline{\delta} + p_1}{N} R\sqrt{\frac{2}{p_2}mg}
$$

gewählt werden.
Die Systemmatrizen des linearisierten Modells lauten

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{N^2}(p_1 + p_2\delta_R) & -\frac{Rp_2}{N^2}\psi_R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p_2}{N^2 m}\psi_R & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\
\mathbf{c}^T &= \begin{pmatrix} \frac{p_1+p_2\delta_R}{N^2} & \frac{p_2}{N^2}\psi_R & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{D} &= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Berechnung der Magnetkraft
Eine Möglichkeit zur Berechnung der magnetischen Kraft f_m ist das Koenergieprinzip. Die Koenergie ist definiert durch

$$
W_m^c = \int_0^{i_L} \psi(i_L)\mathrm{d}(i_L) = \int_0^{i_L} L(\delta) i_L \mathrm{d}(i_L) = \frac{1}{2}L(\delta)i_L^2
$$

mit δ, der Position des magnetischen Ankers (hier äquivalent zum Luftspalt). Es gilt dann

$$
f_m = \frac{\partial W_m^c}{\partial \delta} = \frac{1}{2}\frac{\partial L(\delta)}{\partial \delta} i_L^2.
$$

Beispiel 2: Das mathematische Modell der schwimmenden Kugel kann mit dem Zustand $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h & w \end{bmatrix}^T$, dem Eingang $u = F$ und dem Ausgang $y = h$ wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) &= \begin{bmatrix} w \\ g - \frac{F}{m} - \frac{\rho g \pi h^2}{3m}(3R - h) \end{bmatrix} \\ h(\mathbf{x}, u) &= h \ . \end{aligned}$$

Die benötigte Kraft F_R, um die Kugel bei $h_R = R/3$ in der Ruhe zu halten beträgt dann

$$F_R = mg - \frac{8}{81}\rho g \pi R^3 \ .$$

Die Systemmatrizen des linearisierten Modells ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2\rho g \pi h_R}{3m}(3R - h_R) + \frac{\rho g \pi h_R^2}{3m} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & d &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

Beispiel 3:

a) Das mathematische Modell des elektrischen Netzwerks ergibt sich mit dem Zustand $\mathbf{x} = [u_C \ i_L]^T$ zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \frac{(2u_1 - u_C - u_s - 2R_1 i_L)}{\left(C(u_C) + u_C \frac{\mathrm{d}(C(u_C))}{\mathrm{d}u_C}\right) R_3} \\ \frac{u_1 - R_1 i_L}{L(i_L) + i_L \frac{\mathrm{d}(L(i_L))}{\mathrm{d}i_L}} \end{bmatrix} \\ y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= u_C. \end{aligned}$$

b) Für die Ruhelagen gilt

$$\begin{aligned} u_{C,R} &= 0 \\ i_{L,R} &= \frac{u_1}{R_1}. \end{aligned}$$