Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 2 — Lösungen
VU Automatisierungstechnik - WS13/14

Beispiel 4: Zur Überprüfung der Linearität bzw. Zeitinvarianz werden die gegebenen Systeme in einem ersten Schritt als explizite Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung dargestellt. Lassen sich diese anschließend in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{1a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \tag{1b}$$

anschreiben, kann sofort auf die Linearität des Systems geschlossen werden. Die Zeitinvarianz folgt dann unmittelbar aus der Konstantheit der Systemmatrizen. Ist das System nichtlinear, d.h. ist keine Darstellung in der Form (1) möglich, sind zur Charakterisierung der Zeit(in)varianz weitere Untersuchungen nötig.

a) Das System lautet als Differenzialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{50}x_1x_2 + 1.5tu \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{t})$$
$$y = x_1$$

welches nicht in der Form (1) dargestellt werden kann. Die Zeit tritt in $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ aber explizit auf, womit sofort auf die Zeitvarianz des Systems geschlossen werden kann.

b) Mit den fünf neu eingefügten Zuständen und dem neuen Eingang

$$\begin{aligned} x_1 &= y, & x_4 &= \int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ x_2 &= \dot{y}, & x_5 &= u, \\ x_3 &= \ddot{y}, & v &= \dot{u}, \end{aligned}$$

kann man das gegebene System umschreiben in

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= 2\left(10x_3 + \frac{x_1}{t+1} + \sqrt{2}x_4 + \frac{1}{3}v\right) \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= v\ , \end{aligned}$$

womit leicht ersichtlich ist, dass eine Darstellung gemäß (1) mit dem Zustand $\mathbf{x}$ und dem Eingang v möglich ist. Das System ist linear aber zeitvariant.

c) Das System lautet als Differenzialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\\frac{-3}{\cos(\frac{4}{5}\pi)}x_1+\frac{7}{10\cos(\frac{4}{5}\pi)}u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\\frac{-3}{\cos(\frac{4}{5}\pi)} & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\\frac{7}{10\cos(\frac{4}{5}\pi)}\end{bmatrix}u$$
$$y=x_1$$

womit unmittelbar die Linearität und Zeitinvarianz gefolgert werden kann.

Beispiel 5: Sowohl die Matrix $\mathbf{A}_1$ als auch $\mathbf{A}_2$ haben die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_1 = 2$ und $\lambda_2 = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_2 = 1$. Für die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_1 der Matrix $\mathbf{A}_2$ gilt $1 = g_1 < n_1$, so dass hier ein Hauptvektor berechnet werden muss, um die Transformationsmatrix auf Jordansche Normalform zu erhalten. Die Transformationsmatrizen können zum Beispiel wie folgt gewählt werden

$$\mathbf{V}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{V}_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Die Jordanschen Normalformen der Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ ergeben sich dann zu

$$\tilde{\mathbf{A}}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},\qquad \tilde{\mathbf{A}}_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

Beispiel 6:
Für eine einfachere Darstellung werden die Substitutionen $\overline{k} = \frac{k}{m}$ und $\overline{d} = \frac{d}{m}$ eingeführt.
Die Transformationsmatrix lautet beispielsweise

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\frac{\overline{d}}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}\\-\overline{k} & 0\end{bmatrix}.$$

Das System ergibt sich dann in reeller Jordanscher Normalform zu

$$\dot{\mathbf{z}}=\underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z}+\underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}}_{\widetilde{\mathbf{b}}}u$$
$$y=\underbrace{\mathbf{c}^T\mathbf{V}}_{\widetilde{\mathbf{c}}^T}\mathbf{z}$$

mit

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}-\frac{\overline{d}}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2} & -\frac{\overline{d}}{2}\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\overline{k}m}\\\frac{\overline{d}}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}\,\overline{k}m}\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{c}}^T=\begin{bmatrix}\frac{\overline{d}}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}\end{bmatrix}.$$

Hinweis: Bei einer anderen Wahl der Transformationsmatrix (die Eigenvektoren sind nicht eindeutig) können $\widetilde{\mathbf{b}}$ und $\widetilde{\mathbf{c}}^T$ eine andere Gestalt annehmen.

Beispiel 7:
Die Transitionsmatrix des Systems (1) lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & -e^{2t} + e^t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Die Transitionsmatrix des Systems (2) lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & 2te^t \\ 0 & e^t & -e^{2t} + e^t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems (4) für $u(t) = 1 + t$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ folgt zu

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{4}e^{2t} + 3e^t - \frac{1}{2}t - \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Die Transitionsmatrix des linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems lautet

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{V}\widetilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{V}^{-1} = e^{-\frac{\overline{d}}{2}t} \begin{bmatrix} \frac{\overline{d}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} + \cos(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t) & \frac{2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} \\ -\frac{2\overline{k}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} & -\frac{\overline{d}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} + \cos(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t) \end{bmatrix}$$

und die Lösung ergibt sich für die gegebenen Parameterwerte sowie $u = 0$ und $\mathbf{x}_0^T = [1\,0]$ zu

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \exp(-3t) \begin{bmatrix} \cos(t) + 3\sin(t) \\ -10\sin(t) \end{bmatrix}.$$

Als Hilfsmittel für die Darstellung der Lösung im Zustandsraum bietet sich der MAPLE-Befehl `DEplot` aus dem Paket `DEtools` an.

Beispiel 8: Die Komponenten der Transitionsmatrix ergeben sich mit

$$d(t) = \frac{1}{7}\left(e^{-3t} - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right)$$

zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_{1,1} &= \frac{1}{7}e^{-3t}\left(e^{\frac{5t}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 5\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) + 2\right)\\
\boldsymbol{\Phi}_{1,2} &= -3d(t)\\
\boldsymbol{\Phi}_{1,3} &= \frac{2}{7}e^{-3t}\left(e^{\frac{5t}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - 2\right)\\
\boldsymbol{\Phi}_{2,1} &= 2d(t)\\
\boldsymbol{\Phi}_{2,2} &= \frac{1}{7}e^{-3t}\left(2e^{\frac{5t}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 5\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - 3\right)\\
\boldsymbol{\Phi}_{2,3} &= \frac{1}{21}e^{-3t}\left(4e^{\frac{5t}{2}}\left(2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - 12\right)\\
\boldsymbol{\Phi}_{3,1} &= \boldsymbol{\Phi}_{1,3}\\
\boldsymbol{\Phi}_{3,2} &= -\frac{3}{2}\boldsymbol{\Phi}_{2,3}\\
\boldsymbol{\Phi}_{3,3} &= \frac{1}{7}e^{-3t}\left(8 - e^{\frac{5t}{2}}\left(3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Für den Verlauf des Ausgangs bei der gegebenen Eingangsgröße erhält man

$$y(t) = \frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{21}\left(2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - \frac{2e^{-3t}}{7}.$$

Beispiel 9: Das System $\dot{x} = x$ ist nicht asymptotisch stabil (positiver Eigenwert), (7) ist asymptotisch stabil.
Die Eigenwerte des linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems lauten mit $\overline{k} = \frac{k}{m}$ und $\overline{d} = \frac{d}{m}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\overline{d}}{2} \pm I\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2}$$

weshalb $d > 0$ für asymptotische Stabilität gelten muss.