

Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik  
 Formelsammlung zum Skriptum Automatisierung

**Kapitel 2**

**Satz 2.3 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)** *Es sei  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  stückweise stetig in  $t$  und genüge der Abschätzung (Lipschitz-Bedingung)*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad 0 < L < \infty$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$  und alle  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  so, dass

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

genau eine Lösung für  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  besitzt. Dabei wird  $L$  auch als Lipschitz-Konstante bezeichnet.

**Kapitel 3**

**Berechnung der Transitionsmatrix für lineare zeitkontinuierliche zeitinvariante Systeme**

- (a) Die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  besitzt Eigenwerte  $\lambda_j$  mit  $j = 1, \dots, n$ , für die gilt, dass die geometrische Vielfachheit  $g_j$  und die algebraische Vielfachheit  $n_j$  gleich sind. Jordansche Normalform:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix}$$

- (b) Die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  besitzt genau einen Eigenwert  $\lambda$ , für den gilt, dass die geometrische Vielfachheit  $g = 1$  und die algebraische Vielfachheit  $n > 1$  ist. Jordansche Normalform:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- (c) Die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  besitzt die konjugiert komplexen Eigenwertpaare  $\lambda_j = \alpha_j + I\beta_j$ ,  $\lambda_j^* = \alpha_j - I\beta_j$  mit  $j = 1, \dots, r$ , für die gilt, dass die geometrische Vielfachheit  $g_j$  und die algebraische Vielfachheit  $n_j$  gleich sind.

Reelle Jordansche Normalform:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}$$

Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ -e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) \\ 0 & 0 & \cdots & -e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) \end{bmatrix}$$

**Satz 3.2 (Reelle Jordansche Normalform)** *Es sei die reellwertige  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  die Dynamikmatrix eines linearen, zeitinvarianten Systems. Angenommen,  $\mathbf{A}$  habe  $k$  reelle und  $(n - k) / 2$  konjugiert komplexe Eigenwerte. Dann existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_{k+1}), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_r), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_r)]$$

*bestehend aus linear unabhängigen (komplexwertigen) Eigen- und Hauptvektoren  $\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  mit  $r = (n + k) / 2$  so, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems folgende Form*

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_l \end{bmatrix}$$

*annimmt. Dabei bezeichnen  $\mathbf{J}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  die so genannten Jordanblöcke, deren Struktur für reelle Eigenwerte  $\lambda_i$  in der Form*

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

bzw. für konjugiert komplexe Eigenwerte  $\alpha_i \pm I\beta_i$  in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist.

### Realisierungsproblem

$$\text{Übertragungsfunktion } G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

(a) Realisierung als 1-te Standardform oder Steuerbarkeitsnormalform

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \\ y &= \underbrace{[\tilde{b}_0 \ \tilde{b}_1 \ \cdots \ \tilde{b}_{n-2} \ \tilde{b}_{n-1}]}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{d} u \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

(b) Realisierung als 2-te Standardform oder Beobachtbarkeitsnormalform

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \\ y &= \underbrace{[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{d} u \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

## Schaltungstechnische Realisierung einiger Übertragungsfunktionen

In Abbildung 3.1 ist eine Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung gezeigt.

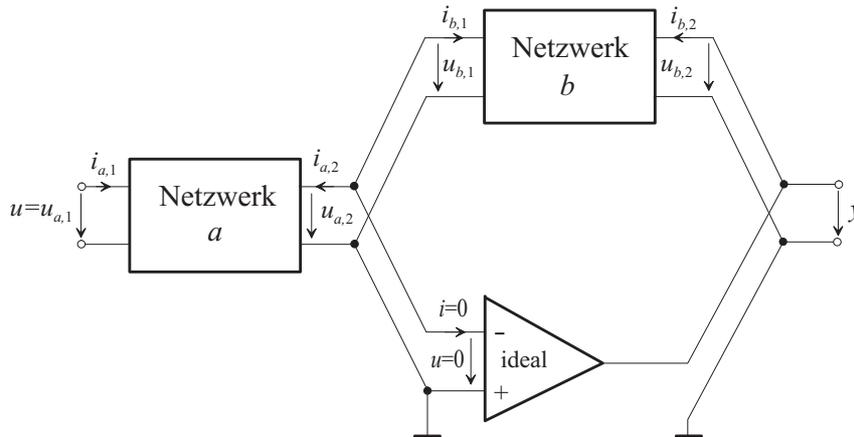


Abbildung 3.1: Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung.

Die Übertragungsfunktion vom Eingang  $u$  zum Ausgang  $y$  lautet

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\hat{u}_{b,2}}{\hat{u}_{a,1}} = \frac{\hat{i}_{b,1}}{Y_{b,12}(s)} \frac{Y_{a,21}(s)}{\hat{i}_{a,2}} = -\frac{Y_{a,21}(s)}{Y_{b,12}(s)}.$$

Da passive  $RLC$ -Netzwerke reziprok sind, gilt allgemein, dass die Admittanzmatrix symmetrisch ist, d.h.  $Y_{12}(s) = Y_{21}(s)$ . Der nachfolgenden Tabelle sind die Leitwerte einiger Netzwerke zu entnehmen, womit sich verschiedene Übertragungsfunktionen als Operationsverstärkerschaltung realisieren lassen.

Schaltung	$Y_{12}$	Koeff.	Schaltung	$Y_{12}$	Koeffizienten
	$-\frac{1}{R}$			$-\frac{V}{(1+sT)}$	$V = \frac{1}{2R}$ $T = \frac{RC}{2}$
	$-sC$			$-V \frac{1+sT}{1+s\eta T}$ $\eta < 1$	$V = \frac{1}{R_1}$ $T = (R_1 + R_2)C$ $\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
	$-V(1+sT)$	$V = \frac{1}{R}$ $T = RC$		$-V \frac{1+s\eta T}{1+sT}$ $\eta < 1$	$V = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1R_2}$ $T = \frac{R_1C}{2}$ $\eta = \frac{2R_1}{2R_1 + R_2}$

**Kapitel 4**

**Satz 4.3 (Routh-Hurwitz Verfahren)** Ein Polynom  $n(s)$  der Form

$$n(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j$$

mit den reellen Koeffizienten  $a_j, j = 0, \dots, n$ , ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn alle Elemente der Pivotspalte des nachfolgenden Routh-Schemas

$s^n$	$a_{01} = a_n$	$a_{02} = a_{n-2}$	$a_{03} = a_{n-4} \dots$
$s^{n-1}$	$a_{11} = a_{n-1}$	$a_{12} = a_{n-3}$	$a_{13} = a_{n-5} \dots$
$s^{n-2}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23} \dots$
$s^{n-3}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33} \dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$s^1$	$a_{n-1,1}$	0	0 $\dots$
$s^0$	$a_{n,1}$		
	<i>Pivotspalte</i>		

mit

$$a_{ij} = \frac{a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-2,1}a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,1}} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n \quad \text{und } j = 1, 2, \dots$$

von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen besitzen.

**Satz 4.4 (Kriterium von Michailov)** Ein Polynom  $n(s)$  vom Grad  $n$  ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn

$$\Delta \arg (n(I\omega)) = n\pi$$

gilt.

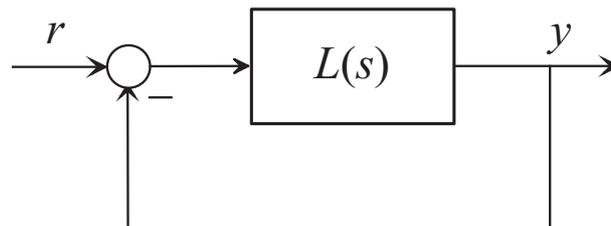


Abbildung 4.2: Geschlossener Regelkreis.

**Satz 4.5 (Nyquist-Kriterium)** Der geschlossene Regelkreis  $T_{r,y}(s)$  nach Abbildung 4.2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  ist genau dann BIBO-stabil, wenn die stetige Winkeländerung von  $1 + L(s)$  folgender Bedingung

$$\Delta \arg (1 + L(I\omega)) = (\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L)) \pi$$

genügt.

**Satz 4.6 (Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung)** *Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  in folgender Form*

$$L(s) = \frac{V z_L(s)}{s^\rho n_L(s)} \exp(-sT_t) \quad , \quad z_L(0) = n_L(0) = 1$$

*mit den teilerfremden Polynomen  $z_L(s)$  und  $s^\rho n_L(s)$  darstellen lässt, wobei nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (A) *Der Verstärkungsfaktor  $V$  und die Totzeit  $T_t$  sind positiv,*
- (B)  *$\text{grad}(n_L(s)) + \rho > \text{grad}(z_L(s))$ ,*
- (C) *das Polynom  $n_L(s)$  ist ein Hurwitzpolynom und für  $\rho$  gilt  $\rho \in \{0, 1, 2\}$ ,*
- (D) *die Betragskennlinie von  $L(I\omega)$  weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie (eine Durchtrittsfrequenz  $\omega_C$ ) auf bzw. die Ortskurve von  $L(I\omega)$  schneidet den Einheitskreis genau einmal und*
- (E) *im Bereich  $|L(I\omega)|_{dB} \geq 0$  gelte  $-540^\circ < \arg(L(I\omega)) < 180^\circ$  (d.h. die Ortskurve des offenen Kreises  $L(s)$  kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Nullpunkt höchstens einmal vollständig umkreisen).*

*Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis nach Abbildung 4.2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $L(s)$  genau dann BIBO-stabil, wenn der Abstand der Phase an der Durchtrittsfrequenz  $\arg(L(I\omega_C))$  zu  $-\pi$ , die so genannte Phasenreserve  $\Phi$ ,*

$$\Phi = \arg(L(I\omega_C)) + \pi$$

*positiv ist.*

## Kapitel 5

### Lead-Lag-Reglerentwurf

- (a) Ein Lead-Glied besitzt eine Übertragungsfunktion der Form

$$R_{Lead}(s) = \frac{1 + sT_{Lead}}{1 + s\eta_{Lead}T_{Lead}} \quad , \quad 0 < \eta_{Lead} < 1 \quad .$$

Will man eine maximale Phasenhebung von  $\Delta\varphi_{Lead}$  an der Stelle  $\omega_C$  erreichen, so berechnen sich die Koeffizienten  $T_{Lead}$  und  $\eta_{Lead}$  zu

$$\eta_{Lead} = 1 + 2 \tan(\Delta\varphi_{Lead}) \left( \tan(\Delta\varphi_{Lead}) - \sqrt{\tan^2(\Delta\varphi_{Lead}) + 1} \right) \quad ,$$

$$T_{Lead} = \frac{1}{\sqrt{\eta_{Lead}\omega_C}} \quad .$$

- (b) Ein Lag-Glied besitzt eine Übertragungsfunktion der Form

$$R_{Lag}(s) = \frac{1 + sT_{Lag}}{1 + s\eta_{Lag}T_{Lag}} \quad , \quad \eta_{Lag} > 1 \quad .$$

Will man eine Betragsabsenkung um  $\Delta a_{Lag}$  und eine Phasenabsenkung um  $\Delta\varphi_{Lag}$  an der Stelle  $\omega_C$  erreichen, so berechnen sich die Koeffizienten  $T_{Lag}$  und  $\eta_{Lag}$  zu

$$T_{Lag} = \frac{\Delta a_{Lag} \sqrt{1 + \tan^2(\Delta\varphi_{Lag})} - 1}{\omega_C \tan(\Delta\varphi_{Lag})},$$

$$\eta_{Lag} = \frac{\omega_C T_{Lag} - \tan(\Delta\varphi_{Lag})}{\omega_C T_{Lag} (1 + \omega_C T_{Lag} \tan(\Delta\varphi_{Lag}))}.$$

## Kapitel 6

**Satz 6.8 (Jury Verfahren)** Ein Polynom  $n(z)$  der Form  $n(z) = a_0 z^0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$  mit den reellen Koeffizienten  $a_j, j = 0, \dots, n$  und  $a_n > 0$  ist genau dann ein Einheitskreispolynom, wenn alle Elemente  $a_{j,n}, j = 0, \dots, n$  der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle

$z^n$	$a_{n,n} = a_n$	$a_{n,n-1} = a_{n-1}$	$\dots$	$a_{n,1} = a_1$	$a_{n,0} = a_0$	
	$a_{n,0} = a_0$	$a_{n,1} = a_1$	$\dots$	$a_{n,n-1} = a_{n-1}$	$a_{n,n} = a_n$	$\lambda_n = \frac{a_{n,0}}{a_{n,n}}$
$z^{n-1}$	$\underbrace{a_{n,n} - \lambda_n a_{n,0}}_{a_{n-1,n}}$	$\underbrace{a_{n,n-1} - \lambda_n a_{n,1}}_{a_{n-1,n-1}}$	$\dots$	$\underbrace{a_{n,1} - \lambda_n a_{n,n-1}}_{a_{n-1,1}}$	$0$	
	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$\dots$	$a_{n-1,n}$	$0$	$\lambda_{n-1} = \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n}}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
	$a_{0,n}$	$0$				

positiv sind. Wenn keines der  $a_{j,n}, j = 0, \dots, n$ , identisch Null ist, dann ist die Anzahl der negativen  $a_{j,n}$  gleich der Anzahl der Nullstellen von  $n(z)$  außerhalb des Einheitskreises.

### Zeitverschiebung

Für kausale Zeitfunktionen  $f(t)$  und  $n \in \mathbb{N}_+$  gilt allgemein

$$\mathbf{Z} \left( \hat{f}(s) e^{-nsT_a} \right) = z^{-n} \mathbf{Z} \left( \hat{f}(s) \right).$$

### Pole im Tustin-Bereich

Sei  $s_i = a$  ein Pol von  $G(s)$ , dann besitzt die zugehörige Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  den Pol

$$q_i = A = \frac{2}{T_a} \tanh \left( \frac{T_a}{2} a \right).$$

Setzt man für  $a = \alpha + I\omega$  ein, so erhält man

$$A = \frac{2 \sinh(T_a \alpha) + I \sin(T_a \omega)}{T_a \cosh(T_a \alpha) + \cos(T_a \omega)}.$$

## Korrespondenzen zur $q$ -Übertragungsfunktion

$G(s)$	$G^\#(q)$
1	1
$\frac{1}{s}$	$\frac{1 - q^{\frac{T_a}{2}}}{q}$
$\frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$	$\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A}}$ mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{q^2}$
$\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)^2}$	$\frac{\left(1 - \frac{T_a}{2}q\right)\left(1 + \frac{q}{B}\right)}{\left(1 + \frac{q}{A}\right)^2}$ mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$ , $B = \frac{A}{1 + aA\frac{T_a^2}{4} - \frac{a}{A}}$

### Kapitel 7

**Satz 7.12 (PBH-Eigenvektortest)** *Das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

der Ordnung  $n$  ist genau dann nicht vollständig erreichbar, wenn ein Vektor  $\mathbf{w}_i^T \neq \mathbf{0}^T$  so existiert, dass gilt

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{w}_i^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{b} = 0 .$$

Man beachte, dass  $\mathbf{w}_i^T$  ein Linkseigenvektor der Matrix  $\mathbf{A}$  ist.

Das System ist genau dann nicht vollständig beobachtbar, wenn ein Vektor  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  so existiert, dass gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{v}_i = 0 .$$

Der Vektor  $\mathbf{v}_i$  entspricht einem (Rechts)eigenvektor der Matrix  $\mathbf{A}$ .

**Satz 7.13 (PBH-Rangtest)** *Das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

ist genau dann vollständig erreichbar, wenn gilt

$$\text{rang}[s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = n$$

für alle  $s$  der komplexen Ebene.

Das System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s\mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n$$

für alle  $s$  der komplexen Ebene.

## Kapitel 8

**Satz 8.1 (Satz von Cayley-Hamilton)** *Bezeichnet*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

das charakteristische Polynom der Matrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann genügt  $\Phi$  der Beziehung

$$p(\Phi) = a_0 \mathbf{E} + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n = \mathbf{0} .$$

**Satz 8.2 (Formel von Ackermann)** *Gegeben sei das Abtastsystem*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad , \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\Phi_g$  des geschlossenen Kreises

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{(\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)}_{\Phi_g} \mathbf{x}_k + \Gamma g r_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= (\mathbf{c}^T + d \mathbf{k}^T) \mathbf{x}_k + d g r_k \end{aligned}$$

können genau dann durch eine Zustandsrückführung der Form

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + g r_k$$

beliebig platziert werden, wenn das Abtastsystem (8.1) vollständig erreichbar ist. Der Rückführungsvektor  $\mathbf{k}^T$  berechnet sich nach der Beziehung

$$\begin{aligned} \underbrace{[0, 0, \dots, 1]}_{\mathbf{e}_n^T = \Gamma_R^T} &= \mathbf{v}_1^T \underbrace{[\Gamma, \Phi \Gamma, \Phi^2 \Gamma, \dots, \Phi^{n-1} \Gamma]}_{\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)} \\ \mathbf{k}^T &= -p_0 \mathbf{v}_1^T - p_1 \mathbf{v}_1^T \Phi - \dots - p_{n-1} \mathbf{v}_1^T \Phi^{n-1} - \mathbf{v}_1^T \Phi^n = -\mathbf{v}_1^T p_{g, \text{soll}}(\Phi) \end{aligned}$$

mit  $p_{g, \text{soll}}(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + z^n$  als gewünschtes charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises.

Will man erreichen, dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = r_0$$

mit der Sprungfolge  $(r_k) = r_0 (1^k) = (r_0, r_0, r_0, \dots)$  als Eingangsgröße, so ergibt sich der Vorfaktor  $g$  in der Form

$$g = \frac{1}{(\mathbf{c}^T + d \mathbf{k}^T) (\mathbf{E} - \Phi - \Gamma \mathbf{k}^T)^{-1} \Gamma + d} .$$

**Satz 8.5 (Formel von Ackermann für den Zustandsbeobachterentwurf)** Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\Phi_e$  des Fehlersystems

$$\mathbf{e}_{k+1} = \underbrace{(\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)}_{\Phi_e} \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

eines vollständigen Beobachters der Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k) \quad , \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + d u_k \end{aligned}$$

zum Abtastsystem (8.1) können genau dann durch  $\hat{\mathbf{k}}$  beliebig platziert werden, wenn das System vollständig beobachtbar ist. Der Vektor  $\hat{\mathbf{k}}$  berechnet sich nach der Beziehung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \Phi)} \hat{\mathbf{v}}_1$$

$$\hat{\mathbf{k}} = -\hat{p}_0 \hat{\mathbf{v}}_1 - \hat{p}_1 \Phi \hat{\mathbf{v}}_1 - \dots - \hat{p}_{n-1} \Phi^{n-1} \hat{\mathbf{v}}_1 - \Phi^n \hat{\mathbf{v}}_1 = -\hat{p}_{g,\text{soll}}(\Phi) \hat{\mathbf{v}}_1$$

mit  $\hat{p}_{g,\text{soll}}(z) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 z + \hat{p}_2 z^2 + \dots + \hat{p}_{n-1} z^{n-1} + z^n$  als gewünschtes charakteristisches Polynom der Dynamikmatrix  $\Phi_e$  des Fehlersystems.

## Allgemeine Formeln

### Eigenschaften der Laplace-Transformation

#### I. Linearität:

Zeitbereich:  $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich:  $c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$

#### II. Ähnlichkeitssatz:

Zeitbereich:  $f(at) \quad , \quad a > 0$

Bildbereich:  $\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

#### III. Erster Verschiebungssatz:

Zeitbereich:  $f(t-a) \sigma(t-a) \quad , \quad a > 0$

Bildbereich:  $e^{-as} \hat{f}(s)$

#### IV. Zweiter Verschiebungssatz:

Zeitbereich:  $f(t+a) \quad , \quad a > 0$

Bildbereich:  $e^{as} \left( \hat{f}(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right)$

### V. Dämpfungssatz:

Zeitbereich:  $e^{-ct} f(t)$  ,  $c \in \mathbb{C}$

Bildbereich:  $\hat{f}(s + c)$

### VI. Differentiation:

Zeitbereich:  $\frac{d}{dt} f(t) = \dot{f}(t)$

Bildbereich:  $s\hat{f}(s) - f(+0)$

bzw.

Zeitbereich:  $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t)$

Bildbereich:  $s^n \hat{f}(s) - f(+0) s^{n-1} - f^{(1)}(+0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$

### VII. Integration:

Zeitbereich:  $\int_0^t f(\tau) d\tau$

Bildbereich:  $\frac{1}{s} \hat{f}(s)$

### VIII. Umkehrung zu VI:

Zeitbereich:  $(-t)^n f(t)$

Bildbereich:  $\frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$

### IX. Umkehrung zu VII:

Zeitbereich:  $\frac{1}{t} f(t)$

Bildbereich:  $\int_s^\infty \hat{f}(\sigma) d\sigma$

### X. Faltungssatz:

Zeitbereich:  $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$

Bildbereich:  $\hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)$

### XI. Periodische Funktionen:

Zeitbereich:  $f(t + T) = f(t)$

Bildbereich:  $\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$

### XII. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

Anfangswertsatz:  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s)$

Endwertsatz:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s)$

## Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$
I.	$\delta(t)$	1
II.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
III.	$t$	$\frac{1}{s^2}$
IV.	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
V.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
VI.	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
VII.	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
VIII.	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
IX.	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

Tabelle 8.1: Laplace-Korrespondenztafel einiger wichtiger Funktionen.

### Eigenschaften der z-Transformation

#### I. Linearität:

Zeitbereich:  $c_1 (f_{1,k}) + c_2 (f_{2,k})$  ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich:  $c_1 f_{1,z}(z) + c_2 f_{2,z}(z)$

#### II. Erster Verschiebungssatz (Rechtsverschiebung):

Zeitbereich:  $(f_{k-n})$  ,  $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich:  $z^{-n} \left( f_z(z) + \sum_{j=1}^n f_{-j} z^j \right)$  bzw.  $(f_{k-n})$  ,  $n \in \mathbb{N}_+$   
 $z^{-n} f_z(z)$  für  $f_j = 0, j < 0$

#### III. Zweiter Verschiebungssatz (Linksverschiebung):

Zeitbereich:  $(f_{k+n})$  ,  $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich:  $z^n \left( f_z(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j} \right)$

#### IV. Dämpfungssatz:

Zeitbereich:  $(c^k f_k)$  ,  $c \in \mathbb{C}$  und  $c \neq 0$

Bildbereich:  $f_z \left( \frac{z}{c} \right)$

### V. Differenzenbildung (Vorwärtsdifferenz):

$$\text{Zeitbereich: } (f_{k+1} - f_k)$$

$$\text{Bildbereich: } (z - 1) f_z(z) - z f_0$$

### VI. Differenzenbildung (Rückwärtsdifferenz):

$$\text{Zeitbereich: } (f_k - f_{k-1})$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{z-1}{z} f_z(z) - f_{-1}$$

### VII. Summenbildung:

$$\text{Zeitbereich: } \left( \sum_{j=0}^k f_j \right)$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{z}{z-1} f_z(z)$$

### VIII. Umkehrung zu V bzw. VI:

$$\text{Zeitbereich: } (k T_a f_k)$$

$$\text{Bildbereich: } -T_a z \frac{d}{dz} f_z(z)$$

### IX. Umkehrung zu VII:

$$\text{Zeitbereich: } 0 \text{ für } k = 0 \text{ und } \left( \frac{f_k}{k T_a} \right) \text{ für } k > 0$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{1}{T_a} \int_z^\infty \frac{f_z(\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

### X. Faltungssatz:

$$\text{Zeitbereich: } (f_{1,k}) * (f_{2,k}) = \sum_{j=0}^k f_{1,k-j} f_{2,j} = \sum_{j=0}^k f_{1,j} f_{2,k-j}$$

$$\text{Bildbereich: } f_{1,z}(z) f_{2,z}(z)$$

### XI. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

$$\text{Anfangswertsatz: } f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f_z(z)$$

$$\text{Endwertsatz: } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) f_z(z)$$

Nr.	s-Bildbereich $\hat{f}(s)$	Zeitbereich $f(t)$	Abtastfolgen $(f_k)$	z-Bildbereich $f_z(z)$
I.	1	$\delta(t)$	$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$	1
II.	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$(1^k)$	$\frac{z}{z-1}$
III.	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$(kT_a)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
IV.	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$	$(e^{akT_a})$	$\frac{z}{z-e^{aT_a}}$
V.	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$((kT_a)^n e^{akT_a})$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT_a}}$
VI.	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin(bt)$	$(\sin(bkT_a))$	$\frac{z \sin(bT_a)}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VII.	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$	$(\cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - \cos(bT_a))}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VIII.	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \sin(bt)$	$(e^{akT_a} \sin(bkT_a))$	$\frac{ze^{aT_a} \sin(bT_a)}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$
IX.	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$	$(e^{akT_a} \cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - e^{aT_a} \cos(bT_a))}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$

Tabelle 8.2: Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

### Einige trigonometrische Beziehungen

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\tan(0) = 0$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$