Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 03.10.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	10	10	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten: ☐ Mo., 13.10.2014 ☐ Di., 14.10.2014

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. 9 P.|

   a) Gegeben ist das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 1 - x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - x_2^2(t).\end{aligned}$$

      i. Bestimmen Sie sämtliche Ruhelagen. 1 P.|

      ii. Linearisieren Sie das System um seine Ruhelagen. 2 P.|

      iii. Untersuchen Sie die Ruhelage $\Delta\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ der linearisierten Systeme auf (globale) asymptotische Stabilität. 1 P.|

   b) Gegeben ist das lineare zeitinvariante Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + 3u(t).\end{aligned}$$

   mit dem Zustand $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$, dem skalaren Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$ und dem skalaren Ausgang $y(t) \in \mathbb{R}$.

      i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \hat{y}(s)/\hat{u}(s)$. 1.5 P.|

      ii. Berechnen Sie die stationäre Ausgangsgröße $\lim_{t\to\infty} y(t)$ für einen Einheitssprung $u(t) = \sigma(t)$. 1 P.|

   c) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems mit der Übertragungsfunktion 2.5 P.|

$$G(s) = \frac{2s^2 + 7s + 1}{s^2 + 5s + 6}.$$

2. Die Übertragungsfunktionen $G_1(s), G_2(s)$ und $G_3(s)$ des in Abbildung 1 10 P.|

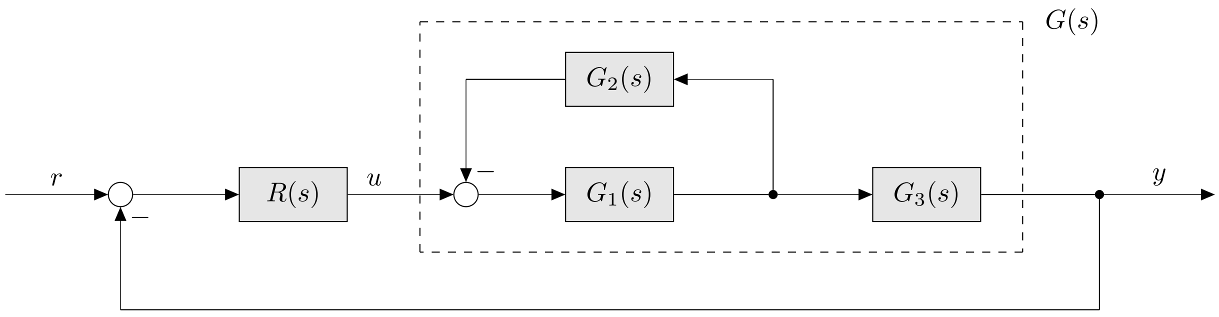

Abbildung 1: Regelkreis

dargestellten Regelkreises lauten

$$G_1(s) = \alpha \frac{s}{s+1}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{s^2-1}, \qquad G_3(s) = \frac{2\alpha s + (s+1)(s^2-1)}{s(s^2-1)^2(s+4)},$$

wobei α einen reellen positiven Parameter bezeichnet.

a) Bestimmen Sie eine Übertragungsfunktion für $G(s)$ und vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich. 2 P.|

In den weiteren Teilaufgaben betrachten wir den Spezialfall $\alpha = 1$ für den

$$G(s) = \frac{1}{(s^2-1)(s+4)}$$

gilt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Routh-Hurwitz Verfahrens, dass sich der geschlossene Regelkreis durch einen P-Regler 2.5 P.|

$$R(s) = K_p$$

nicht stabilisieren lässt.

c) Untersuchen Sie mittels des Routh-Hurwitz Verfahrens für welche Werte von K_p und T_v der geschlossene Regelkreis mit Hilfe eines (idealen) PD-Reglers 2.5 P.|

$$R(s) = K_p(1 + T_v s)$$

stabilisiert werden kann.

d) Die Nyquist-Ortskurve des offenen Kreises $L(s) = R(s)G(s)$ für einen PID-Regler 3 P.|

$$R(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s\right), \quad K_p = 10, \quad T_v = 2, \quad T_n = 2$$

ist in Abbildung 2 zu sehen. Untersuchen Sie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums.

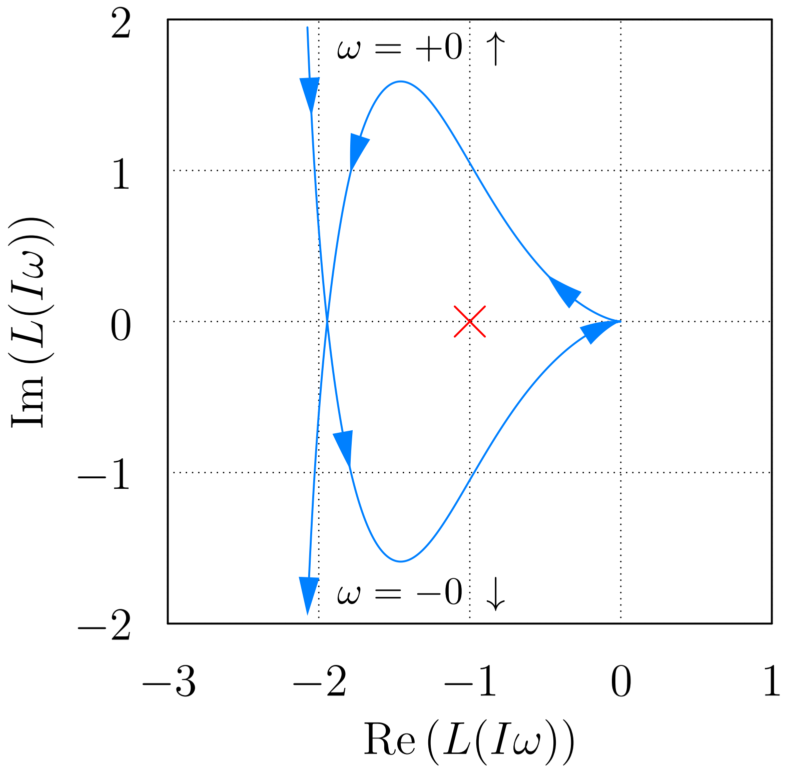

Abbildung 2: Nyquist-Ortskurve

3. Wird das lineare zeitinvariante dynamische System 10 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

mit einer Abtastzeit T_a abgetastet, ergibt sich ein zeitdiskretes Modell der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\left(T_a\right)\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k.$$

a) Welche der angegebenen Matrizen beschreibt die Dynamik von obigem zeitdiskreten System? 3 P.|

$$\mathbf{\Phi}_1\left(T_a\right) = \begin{bmatrix} 1 & T_a & T_a - \frac{3}{2}e^{-2T_a} + e^{-T_a} \\ 0 & 1 & 1 - e^{-T_a} \\ 0 & 0 & 3 - e^{-T_a} - e^{-2T_a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_2\left(T_a\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2}e^{T_a} - \frac{3}{2}e^{-2T_a} & -1 + \frac{1}{2}e^{T_a} + \frac{1}{2}e^{-T_a} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{T_a} + \frac{1}{2}e^{-2T_a} & \frac{1}{2}e^{T_a} - \frac{1}{2}e^{-2T_a} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{T_a} - \frac{1}{2}e^{-T_a} & \frac{1}{2}e^{T_a} + \frac{1}{2}e^{-T_a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_3\left(T_a\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^{-2T_a} - 2e^{-T_a} + \frac{3}{2} & \frac{1}{2}e^{-2T_a} - e^{-T_a} + \frac{1}{2} \\ 0 & -e^{-2T_a} + 2e^{-T_a} & e^{-T_a} - e^{-2T_a} \\ 0 & -2e^{-T_a} + 2e^{-2T_a} & 2e^{-2T_a} - e^{-T_a} \end{bmatrix}$$

Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

b) Bestimmen Sie $\mathbf{\Gamma}$ zu obigem Modell. 2 P.|

c) Das System startet zum Zeitpunkt $t = 0$ beim Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ und erreicht mit abgeschalteter Stellgröße ($u(t) \equiv 0$) zum Zeitpunkt $t = 3T_a$ den Zustand 2.5 P.|

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathbf{x}_0$.

d) Ist das System (1) vollständig steuerbar? 1.5 P.|

e) Geben Sie eine Ausgangsgleichung für das zeitdiskrete System so an, dass es sprungfähig ist. 1 P.|

4. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben, die unabhängig voneinander gelöst werden können. 11 P.|

   a) Für welche Abtastzeiten T_a gehört die Übertragungsfunktion 3 P.|

   $$G^{\#}(q) = -\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{q}{2}+1\right)\left(\frac{q}{3}-3\right)}{\left(\frac{q}{12}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q}{4}-1\right)}$$

   zu einer

      i. sprungfähigen,
      ii. realisierbaren

   Strecke?

   b) Geben Sie die *Definition* von Erreichbarkeit im zeitdiskreten Fall *allgemein* an, d.h. wann nennt man ein System der Form 2 P.|

   $$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k$$

   vollständig erreichbar?

   c) Geben Sie je ein Beispiel für ein 1.5 P.|

      - autonomes, lineares
      - zeitvariantes, nichtlineares
      - lineares, instabiles

   Abtastsystem *zweiter Ordnung* an.

   d) Gegeben ist ein zeitdiskretes System in der Zustandsraumdarstellung 3 P.|

   $$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

   mit dem Ausgang $y_k = x_{1,k}$.

      i. Zeigen Sie anhand des charakteristischen Polynoms, dass mit dem Regelgesetz $u_k = k_1 x_{1,k} + k_2 x_{2,k} + k_3 x_{3,k}$ nicht alle Eigenwerte des geschlossenen Kreises frei gewählt werden können.
      ii. Legen Sie die Koeffizienten k_1, k_2 und k_3 des Regelgesetzes so fest, dass alle Eigenwerte im geschlossenen Kreis bei $-\frac{1}{2}$ liegen.

   e) Betrachten Sie ein System der Form 1.5 P.|

   $$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \tag{2}$$

   mit $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ und $n > 2$, wobei $\mathbf{\Phi}$ ungleich der Nullmatrix ist. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

   Für $u_k = 0$ und $\det(\mathbf{\Phi} - \mathbf{E}) = 0$ hat das System unendlich viele Ruhelagen.

   Achten Sie auf eine ausreichende Begründung Ihrer Antwort!