Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 28.11.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	8	9	12	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten: ☐ Fr., 05.12.2014 ☐ Di., 09.12.2014

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. 11 P.|

a) Gegeben ist ein nichtlineares System in impliziter Form durch

$$a\cos(x) - \dot{x}\sqrt{x} - \ddot{x} - \int\limits_0^t \cos(x(\tau))u(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$$

und die Ausgangsgleichung

$$y - x - gu^2 = 0.$$

i. Geben Sie das System in Zustandsdarstellung der Form 1.5 P.|

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}, u)\end{aligned}$$

an.

ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u = u_s \neq 0$. 1.5 P.|

iii. Linearisieren Sie das System um die Ruhelage, für die $0 \leq x_i \leq \pi$ gilt, und geben Sie das linearisierte System an. 1.5 P.|

iv. Welche Aussage können Sie für $u_s = 0$ und $a > 0$ über die Stabilität der Ruhelage des linearisierten Systems treffen? 1.5 P.|

b) Gegeben ist das lineare System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

i. Für das angegebene System gilt $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{b} = 0$. Begründen Sie anhand dieser Tatsache, ob das System vollständig erreichbar ist. 1.5 P.|

ii. Für $u(t) = 0$ ergibt sich ein autonomes System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = [1\ 2\ -1]^T$. 1.5 P.|

c) Für ein System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ durch 2 P.|

$$\begin{bmatrix} 2e^t + \frac{3}{2}\sin(2t) - \cos(2t) & -2\cos(2t) - \frac{7}{2}\sin(2t) + 2e^t & -\cos(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t) + e^t \\ -\frac{1}{2}\sin(2t) & \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) & -\frac{1}{2}\sin(2t) \\ -2\sin(2t) + 2\cos(2t) - 2e^t & 2\cos(2t) - 2e^t + 6\sin(2t) & -e^t + 2\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{bmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}$.

2. Die Teilaufgaben (a) und (b) können unabhängig voneinander gelöst werden. 8 P.|

a) Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des nichtlinearen Differentialgleichungssystems 2 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \arctan(x), \quad x(0) = x_0$$

und geben Sie eine geeignete Lipschitz Konstante $0 < L < \infty$ an. Ist die Existenz und Eindeutigkeit global gewährleistet? Begründen Sie ihre Antworten ausführlich.

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion 6 P.|

$$G(s) = \frac{1}{s(\frac{s}{10}\sqrt{3}+1)(\frac{s}{10\sqrt{3}}+1)}.$$

Entwerfen Sie mithilfe des Frequenzkennlinien-Verfahrens einen Regler minimaler Ordnung so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Eigenschaften aufweist:

i. Anstiegszeit $t_r = 0.15$ s
ii. Überschwingen $\ddot{u} = 25\%$
iii. bleibende Regelabweichung $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$.

Hinweis: Sie können einen möglichen Realisierungsterm im Nenner des Reglers bei der Auslegung vernachlässigen.

3. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. 9 P.|

a) Betrachtet wird das Abtastsystem 2.5 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

i. Für welche Wertebereiche von α, β und γ ist das System vollständig beobachtbar?

ii. Für welche Wertebereiche von α, β und γ hat der **nicht beobachtbare** Unterraum die Dimension 2 und besitzt eine stabile Dynamik?

b) Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $\gamma = 2$ gilt.

i. Für das System soll nun ein vollständiger Luenberger Beobachter entworfen werden. Zeigen Sie, dass dadurch nicht alle Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik beliebig wählbar sind. 1.5 P.|

ii. Bestimmen Sie den Rückführungsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ eines vollständigen Beobachters so, dass sämtliche Eigenwerte der Fehlerdynamik bei $\lambda_i = -\frac{1}{2}$ zu liegen kommen. 2 P.|

iii. Geben Sie die Dynamik des Schätzfehlers an. Kann diese durch die Wahl der Eingangsgröße u_k destabilisiert werden? 1 P.|

c) Ist für das Abtastsystem 2 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x_k}$$

ein Simulator einsetzbar, um **alle** Zustände zu schätzen? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

4. Die Teilaufgaben (a)-(c) können unabhängig voneinander gelöst werden. 12 P.|

(a) Gegeben sei die Verschaltung von LTI-Systemen nach Abbildung 1. 4 P.|

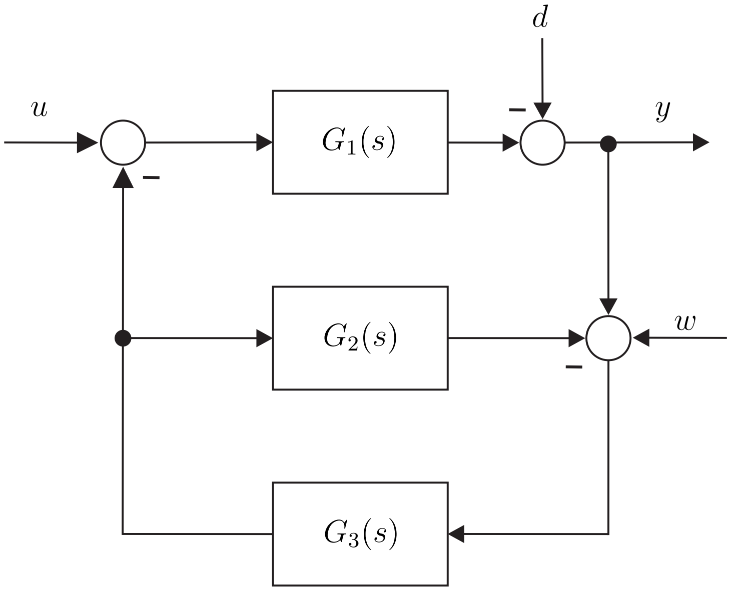

Abbildung 1: Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen.

i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $T_{u,y}(s)$, $T_{d,y}(s)$ und $T_{w,y}(s)$ vom Eingang u, von der Störung d sowie vom Messrauschen w zum Ausgang y. 1.5 P.|

ii. Nachfolgend sei $G_1(s) = \frac{V_1}{1+sT}$, $G_2(s) = V_2$ und $G_3(s) = \frac{V_3}{s}$ mit positiven Verstärkungen V_1, V_2, V_3. Ermitteln Sie den Wertebereich von T so, dass die Übertragungsfunktion $T_{u,y}(s)$ BIBO-stabil ist. 1.5 P.|

iii. Bestimmen Sie das Verhältnis von V_1 zu V_2 so, dass sich die stationäre Ausgangsgröße infolge einer Störung $d(t) = 2+\frac{-7t^2+t^3}{5-8t+11t^2-2t^3}-5t\cos(3t)\exp(-8t)$ zu $y_\infty = -1$ ergibt. 1 P.|

(b) Abbildung 2 zeigt das Ausgangsverhalten eines zeitdiskreten LTI-Systems auf bestimmte Eingangsfolgen (u_k). 5 P.|

i. Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Impulsfolge (g_k) und stellen Sie die Impulsfolge in der entsprechenden Vorlage in Abbildung 2 graphisch dar. 2 P.|

ii. Die Eingangs-, Ausgangs-, und Durchgriffsvektoren sind durch $\mathbf{\Gamma} = [1, 0, \beta]^T$, $\boldsymbol{c}^T = [1, 1, 1]$ und $d = 0$ gegeben. Bestimmen Sie β und geben Sie eine mögliche Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}$ an. 3 P.|

(c) Gegeben ist ein zeitkontinuierliches LTI-System mit dem Pol-Nullstellen Diagramm nach Abbildung 3. 3 P.|

i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ und beurteilen Sie das System hinsichtlich BIBO-Stabilität, Phasenminimalität und Sprungfähigkeit. Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die zugehörige z-Übertragungsfunktion $G(z)$ für eine Abtastzeit von $T_a = \frac{1}{2}\ln(2)$ und stellen Sie das resultierende System als Differenzengleichungssystem mit einer minimalen Anzahl von Zuständen dar. 2 P.|

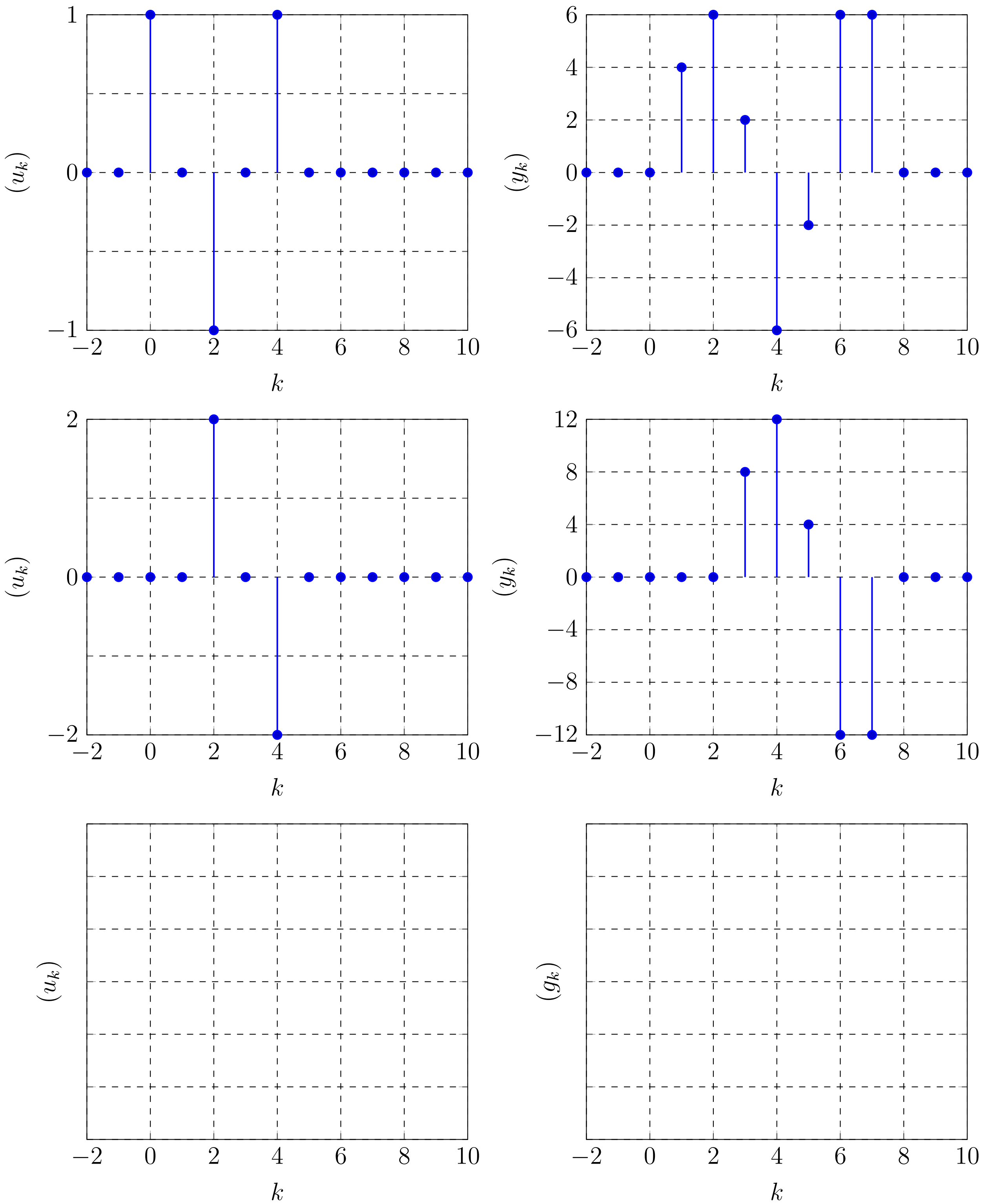

Abbildung 2: Eingangs-Ausgangsverhalten eines zeitdiskreten LTI-Systems.

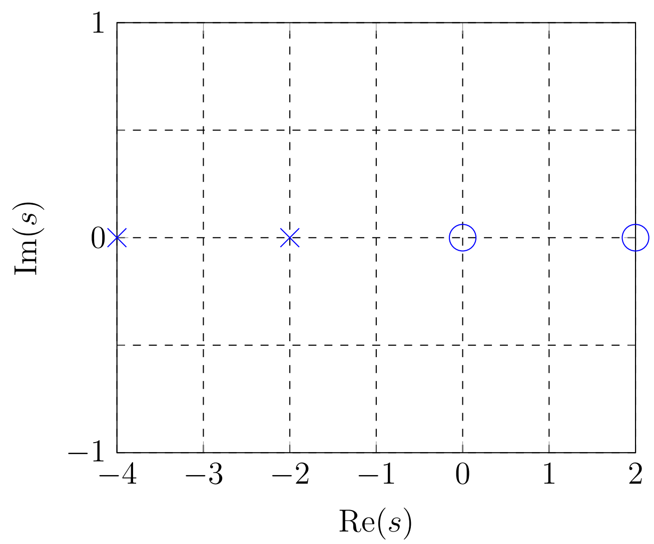

Abbildung 3: Pol-Nullstellen Diagramm eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems.