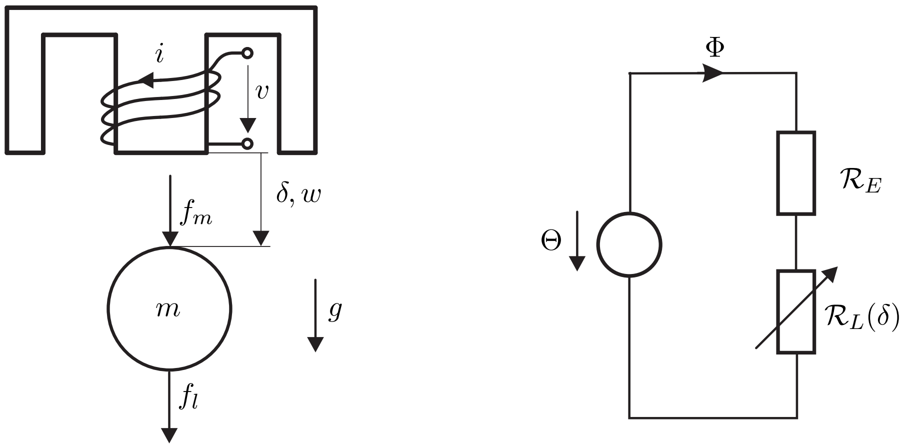
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 1
VU Automatisierung - WS14/15

Beispiel 1: Diese Aufgabe soll die Bedeutung von Ruhelagen am Beispiel der eindimensionalen magnetischen Lagerung aus Abbildung 1(a) zeigen. Ein Elektromagnet wird dabei mit einer Spannung v versorgt, welche einen Strom i und damit eine Magnetkraft f_m zur Folge hat. Auf das zu lagernde Objekt mit der Masse m wirken die Magnetkraft, die Gewichtskraft und eine äußere Lastkraft f_l. Der Luftspalt zwischen Elektromagnet und dem Objekt ist mit δ bezeichnet und die Geschwindigkeit des Objekts mit w. Ferner ist in Abbildung 1(b) das magnetische Ersatzschaltbild für den magnetischen Fluss Φ dargestellt. Es besteht aus einer Durchflutungsquelle $\Theta = Ni$, wobei N die Anzahl der Windungen bezeichnet, einer konstanten Eisenreluktanz $\mathcal{R}_E = p_1$ und einer luftspaltabhängigen Reluktanz $\mathcal{R}_L(\delta) = p_2\,\delta$ mit den Konstanten p_1 und p_2. Für das elektrische Teilsystem gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = -Ri + v$, wobei $\psi = L_G(\delta)i$ den verketteten Fluss und R den elektrischen Widerstand der Spule des Elektromagneten bezeichnen.



(a) Prinzipskizze (b) Magnetisches Ersatzschaltbild

Abbildung 1: Prinzipskizze der eindimensionalen Magnetlagerung und magnetisches Ersatzschaltbild.

Für die Induktivität gilt

$$L_G(\delta) = \frac{N^2}{\mathcal{R}_G(\delta)} \tag{1}$$

wobei $\mathcal{R}_G(\delta)$ die Ersatzreluktanz des Magnetkreises gemäß Abbildung 1(b) bezeichnet. Für die Magnetkraft gilt

$$f_m = \frac{1}{2}\frac{\partial L_G(\delta)}{\partial \delta} i^2. \tag{2}$$

Das Gesamtmodell der magnetischen Lagerung lautet mit dem Strom i als Ausgangsgröße

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\delta}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{R(p_1+p_2\delta)}{N^2}\psi + v \\ w \\ -\frac{1}{2}\frac{p_2}{N^2 m}\psi^2 + g + \frac{f_l}{m}\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$y = h(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \frac{\psi}{L_G(\delta)} = \frac{p_1+p_2\delta}{N^2}\psi. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Systems für konstante Eingangsgrößen $\mathbf{u}_R = \begin{bmatrix} v_R & f_{l,R}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Angenommen $\delta_R = \overline{\delta}$ sei eine gewünschte Ruhelage des Systems für $f_{l,R} = 0$. Bestimmen Sie dann v_R so, dass $\delta_R = \overline{\delta}$ eine Ruhelage des Systems darstellt.

b) Linearisieren Sie das nichtlineare Zustandsmodell um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ und geben Sie es in der Zustandsraumdarstellung

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} \tag{5a}$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u} \tag{5b}$$

an.

Beispiel 2: Im Folgendem soll die Berechnung der Ruhelagen und die Linearisierung für verschiedene Systemklassen behandelt werden.

a) Das mathematische Modell einer Kugel (Radius $R > 0$, Masse $m > 0$), die in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht ρ schwimmt (siehe Abbildung 2) ist durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},u) = \begin{bmatrix} w \\ g - \frac{F}{m} - \frac{\rho g \pi h^2}{3m}(3R-h)\end{bmatrix}$$

$$h(\mathbf{x},u) = h\ .$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h & w\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ den Zustand, $u = F$ den Eingang und $y = h$ den Ausgang $y = h$ sowie g die Gravitationskonstante.

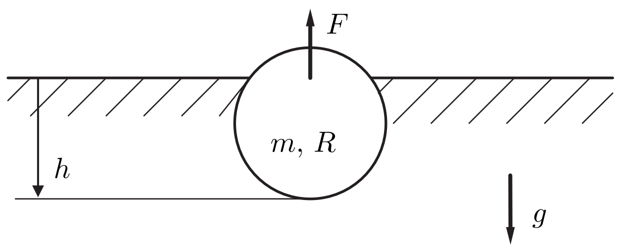


Abbildung 2: Schwimmende Kugel.

Bestimmen Sie jenen Wert der Kraft F_R, bei dem die Eintauchtiefe der Kugel in der Ruhe $h_R = \frac{R}{3}$ beträgt und bringen Sie das mathematische Modell durch Linearisierung um diese Ruhelage in die Form (5).

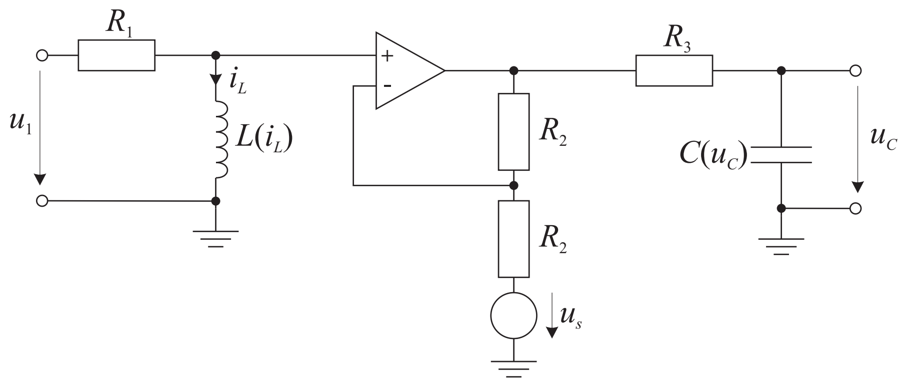


Abbildung 3: Elektrisches System

b) Gegeben ist das elektrische System nach Abbildung 3. Die darin verwendete Induktivität ist eine Funktion des Stroms $L = L(i_L)$ und die Kapazität ist von der Spannung u_C abhängig, d.h. $C = C(u_C)$. Der Operationsverstärker wird ideal angenommen und ein unbelasteter Ausgang u_C vorausgesetzt, d.h. es fließt kein Strom aus den Klemmen.

Das mathematische Modell ergibt sich mit dem Zustand $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C & i_L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dfrac{(2u_1 - u_C - u_s - 2R_1 i_L)}{\left(C(u_C) + u_C \frac{\mathrm{d}(C(u_C))}{\mathrm{d}u_C}\right) R_3} \\ \dfrac{u_1 - R_1 i_L}{L(i_L) + i_L \frac{\mathrm{d}(L(i_L))}{\mathrm{d}i_L}} \end{bmatrix}$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u_C.$$

Im Folgenden gilt

$$L(i_L) = L_0 + L_1 i_L^2$$

$$C(u_C) = C_0 + C_1 \left(1 - e^{-\frac{u_C}{u_{C0}}}\right),$$

mit den konstanten, positiven Parametern L_0, L_1, C_0, C_1 und u_{C0}. Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u_s = 0$ und $u_1 = \text{konst.}$

Beispiel 3: Überprüfen Sie die folgenden dynamischen Systeme auf Linearität bzw. Zeitinvarianz.

a)

$$5\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7.5tu$$

b)

$$\frac{1}{2}y^{(3)} - 10\ddot{y} - \frac{y}{1+t} = \int_0^t \sqrt{2}u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{3}\dot{u}$$

c)

$$\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)\ddot{y} + 3y = \frac{7}{10}u$$