Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 1 — Lösungen
VU Automatisierung - WS14/15

Beispiel 1:
Die Ruhelagen des Systems berechnen sich zu

$$\begin{aligned}\psi_R &= \pm\sqrt{\frac{2N^2}{p_2}(mg+f_{l,R})}\\ \delta_R &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{v_R N^2}{R\psi_R}-p_1\right)\\ w_R &= 0.\end{aligned}$$

Damit für $f_{l,R}=0$ die Position $\delta_R=\overline{\delta}$ eine Ruhelage des Systems darstellt, muss die Spannung zu

$$v_R = \pm\frac{p_2\overline{\delta}+p_1}{N}R\sqrt{\frac{2}{p_2}mg}$$

gewählt werden.
Die Systemmatrizen des linearisierten Modells lauten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{N^2}(p_1+p_2\delta_R) & -\frac{Rp_2}{N^2}\psi_R & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{p_2}{N^2 m}\psi_R & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{m}\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix}\frac{p_1+p_2\delta_R}{N^2} & \frac{p_2}{N^2}\psi_R & 0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Beispiel 2:

a) Die benötigte Kraft F_R, um die Kugel bei $h_R = R/3$ in der Ruhe zu halten, beträgt

$$F_R = mg - \frac{8}{81}\rho g\pi R^3\ .$$

Die Systemmatrizen des linearisierten Modells ergeben sich zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\frac{2\rho g\pi h_R}{3m}(3R-h_R)+\frac{\rho g\pi h_R^2}{3m} & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{m}\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\ .$$

b) Für die Ruhelagen gilt

$$\begin{aligned}u_{C,R} &= 0\\ i_{L,R} &= \frac{u_1}{R_1}.\end{aligned}$$

Beispiel 3: Zur Überprüfung der Linearität bzw. Zeitinvarianz werden die gegebenen Systeme in einem ersten Schritt als explizite Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dargestellt. Lassen sich diese anschließend in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{1a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \tag{1b}$$

anschreiben, kann sofort auf die Linearität des Systems geschlossen werden. Die Zeitinvarianz folgt dann unmittelbar aus der Konstantheit der Systemmatrizen. Ist das System nichtlinear, d.h. ist keine Darstellung in der Form (1) möglich, sind zur Charakterisierung der Zeit(in)varianz weitere Untersuchungen nötig.

a) Das System lautet als Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{50}x_1x_2 + 1.5tu \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{t})$$

$$y = x_1,$$

welches nicht in der Form (1) dargestellt werden kann. Die Zeit tritt in $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ aber explizit auf, womit sofort auf die Zeitvarianz des Systems geschlossen werden kann.

b) Mit den fünf neu eingefügten Zuständen und dem neuen Eingang

$$x_1 = y, \qquad x_4 = \int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$x_2 = \dot{y}, \qquad x_5 = u,$$

$$x_3 = \ddot{y}, \qquad v = \dot{u},$$

kann man das gegebene System umschreiben in

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= 2\left(10x_3 + \frac{x_1}{t+1} + \sqrt{2}x_4 + \frac{1}{3}v\right) \\
\dot{x}_4 &= x_5 \\
\dot{x}_5 &= v\ ,
\end{aligned}$$

womit leicht ersichtlich ist, dass eine Darstellung gemäß (1) mit dem Zustand $\mathbf{x}$ und dem Eingang v möglich ist. Das System ist linear aber zeitvariant.

c) Das System lautet als Differenzialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-3}{\cos(\frac{4}{5}\pi)}x_1 + \frac{7}{10\cos(\frac{4}{5}\pi)}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3}{\cos(\frac{4}{5}\pi)} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7}{10\cos(\frac{4}{5}\pi)} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

womit unmittelbar die Linearität und Zeitinvarianz gefolgert werden kann.