

Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik  
 Übung 2  
 VU Automatisierung - WS14/15

**Beispiel 4:** Gegeben sind die beiden autonomen Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \mathbf{x} \quad (1)$$

und

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \mathbf{x}. \quad (2)$$

Berechnen Sie die regulären Zustandstransformationen  $\mathbf{x} = \mathbf{V}_1 \mathbf{z}$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{V}_2 \mathbf{z}$ , die die Systeme (1) und (2) in die Jordansche Normalform transformieren. Geben Sie außerdem die Matrizen  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  in Jordanscher Normalform an.

**Beispiel 5:** Gegeben ist das Modell eines linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= [1 \ 0] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3)$$

mit der Federsteifigkeit  $k$ , der Dämpfungskonstante  $d$ , der Masse  $m$  und  $u = F$  als Kraft auf die Masse. Für die Parameter gelte  $d^2 < 4km$ .

Berechnen Sie die reguläre Zustandstransformation  $\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{z}$ , die das System (3) in die *reelle* Jordansche Normalform transformiert und geben Sie das entsprechende transformierte System an.

**Beispiel 6:** Berechnen Sie die Transitionsmatrizen  $\Phi$  der Systeme (1), (2) und (3). Berechnen Sie die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4)$$

mit  $\mathbf{A}_1$  aus (1) für die Eingangsgröße  $u(t) = 1 + t$  und den Anfangswert  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Geben Sie die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des Systems (3) für den Fall  $u = 0$ ,  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0]^T$  sowie die Parameterwerte  $m = 1$ ,  $d = 6$  und  $k = 10$  an.

Zeichnen Sie den jeweiligen Lösungsverlauf im Zustandsraum mit MAPLE.

**Beispiel 7:** Gegeben ist das folgende lineare System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Berechnen Sie die Transitionsmatrix  $\Phi$  des Systems (5) mit Hilfe der Laplacetransformation. Berechnen Sie den Verlauf des Ausgangs  $y$  für die Anfangsbedingung  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  und die Stellgröße  $u = \exp(t)$ . Interpretieren Sie das Ergebnis anhand der Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$ .

**Hinweise:**

- Die Inverse einer (regulären) Matrix läßt sich relativ einfach über die Adjunkte  $\text{adj}(\mathbf{A})$  berechnen. Es gilt dann  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$ , wobei für die Einträge der Adjunkten gilt  $\text{adj}(\mathbf{A})_{j,i} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , mit  $M_{ij}$  dem Wert der Unterdeterminanten, die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte von  $\mathbf{A}$  entsteht.
- Es ist nicht notwendig, den Verlauf des gesamten Zustandes zu berechnen.

**Beispiel 8:** Welche der folgenden Systeme sind asymptotisch stabil?

$$\dot{x} = x \tag{6}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{7}$$

Begründen Sie jeweils Ihre Aussage. Was muss für die Parameterwerte des Systems (3) gelten, damit es asymptotisch stabil ist?