Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 2 — Lösungen
VU Automatisierungstechnik - WS14/15

Beispiel 4: Sowohl die Matrix $\mathbf{A}_1$ als auch $\mathbf{A}_2$ haben die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_1 = 2$ und $\lambda_2 = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_2 = 1$. Für die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_1 der Matrix $\mathbf{A}_2$ gilt $1 = g_1 < n_1$, so dass hier ein Hauptvektor berechnet werden muss, um die Transformationsmatrix auf Jordansche Normalform zu erhalten. Die Transformationsmatrizen können zum Beispiel wie folgt gewählt werden

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Jordanschen Normalformen der Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ ergeben sich dann zu

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 5:
Für eine einfachere Darstellung werden die Substitutionen $\overline{k} = \frac{k}{m}$ und $\overline{d} = \frac{d}{m}$ eingeführt.
Die Transformationsmatrix lautet beispielsweise

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{d}}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2} \\ -\overline{k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Das System ergibt sich dann in reeller Jordanscher Normalform zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}}_{\widetilde{\mathbf{b}}}u \\ y &= \underbrace{\mathbf{c}^T\mathbf{V}}_{\widetilde{\mathbf{c}}^T}\mathbf{z} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} -\frac{\overline{d}}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2} & -\frac{\overline{d}}{2} \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\overline{k}m} \\ \frac{\overline{d}}{\sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2}\,\overline{k}m} \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathbf{c}}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\overline{d}}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hinweis: Bei einer anderen Wahl der Transformationsmatrix (die Eigenvektoren sind nicht eindeutig) können $\widetilde{\mathbf{b}}$ und $\widetilde{\mathbf{c}}^T$ eine andere Gestalt annehmen.

Beispiel 6:
Die Transitionsmatrix des Systems (1) lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & -e^{2t} + e^t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Die Transitionsmatrix des Systems (2) lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & 2te^t \\ 0 & e^t & -e^{2t} + e^t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems (4) für $u(t) = 1 + t$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ folgt zu

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{4}e^{2t} + 3e^t - \frac{1}{2}t - \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Die Transitionsmatrix des linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems lautet

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{V}\widetilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{V}^{-1} = e^{-\frac{\overline{d}}{2}t} \begin{bmatrix} \frac{\overline{d}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} + \cos(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t) & \frac{2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} \\ -\frac{2\overline{k}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} & -\frac{\overline{d}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t)}{\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}} + \cos(\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k}-\overline{d}^2}t) \end{bmatrix}$$

und die Lösung ergibt sich für die gegebenen Parameterwerte sowie $u = 0$ und $\mathbf{x}_0^T = [1\,0]$ zu

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \exp(-3t) \begin{bmatrix} \cos(t) + 3\sin(t) \\ -10\sin(t) \end{bmatrix}.$$

Als Hilfsmittel für die Darstellung der Lösung im Zustandsraum bietet sich der MAPLE-Befehl `DEplot` aus dem Paket `DEtools` an.

Beispiel 7: Die Komponenten der Transitionsmatrix ergeben sich mit

$$d(t) = \frac{1}{7}\left(e^{-3t} - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right)$$

zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_{1,1} &= \frac{1}{7}e^{-3t}\left(e^{\frac{5t}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 5\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) + 2\right)\\
\mathbf{\Phi}_{1,2} &= -3d(t)\\
\mathbf{\Phi}_{1,3} &= \frac{2}{7}e^{-3t}\left(e^{\frac{5t}{2}}\left(2\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - 2\right)\\
\mathbf{\Phi}_{2,1} &= 2d(t)\\
\mathbf{\Phi}_{2,2} &= \frac{1}{7}e^{-3t}\left(2e^{\frac{5t}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 5\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - 3\right)\\
\mathbf{\Phi}_{2,3} &= \frac{1}{21}e^{-3t}\left(4e^{\frac{5t}{2}}\left(2\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 3\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - 12\right)\\
\mathbf{\Phi}_{3,1} &= \mathbf{\Phi}_{1,3}\\
\mathbf{\Phi}_{3,2} &= -\frac{3}{2}\mathbf{\Phi}_{2,3}\\
\mathbf{\Phi}_{3,3} &= \frac{1}{7}e^{-3t}\left(8 - e^{\frac{5t}{2}}\left(3\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Für den Verlauf des Ausgangs bei der gegebenen Eingangsgröße erhält man

$$y(t) = \frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{21}\left(2\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 3\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) - \frac{2e^{-3t}}{7}.$$

Beispiel 8: Das System $\dot{x} = x$ ist nicht asymptotisch stabil (positiver Eigenwert), (7) ist asymptotisch stabil.
Die Eigenwerte des linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems lauten mit $\overline{k} = \frac{k}{m}$ und $\overline{d} = \frac{d}{m}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\overline{d}}{2} \pm I\frac{1}{2}\sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2}$$

weshalb $d > 0$ für asymptotische Stabilität gelten muss.