Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 5 — Lösungen
VU Automatisierung - WS14/15

Beispiel 22: Die Dynamikmatrix $\boldsymbol{\Phi}$ und der Eingangsvektor $\boldsymbol{\Gamma}$ des Abtastsystems berechnen sich zu

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} (1+T_a)\exp(-T_a) & T_a \exp(-T_a) \\ -T_a \exp(-T_a) & (1-T_a)\exp(-T_a) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1-(1+T_a)\exp(-T_a) \\ T_a \exp(-T_a) \end{bmatrix}.$$

Beispiel 23: Die z-Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(z) = k_p + \frac{k_I T_a}{z-1} + \frac{k_d}{T_a}\frac{z-1}{z}$$

und die Sprungantwort des PID-Reglers lautet

$$(u_k) = k_p(1^k) + k_I(kT_a) + \frac{k_d}{T_a}\delta_k.$$

Beispiel 24: Die z-Übertragungsfunktion zu der gegebenen s-Übertragungsfunktion $G(s)$ berechnet sich zu

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = -3 + \frac{9}{5}\frac{z-1}{z-\exp(4T_a)} + \frac{6}{5}\frac{z-1}{z-\exp(-T_a)}.$$

Beispiel 25: Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit einem P-Regler mit der Verstärkung $k_p = 1$ und mit der Abtastzeit $T_a = \ln(3/2)$ berechnet sich zu

$$T_{r,y}(z) = \frac{k_p G(z)}{1 + k_p G(z)} = \frac{3}{2}\frac{553z - 228}{120z^2 + 142z + 63}.$$

Für die Bestätigung der BIBO-Stabilität muss überprüft werden, ob das Nennerpolynom $120z^2 + 142z + 63$ ein Einheitskreispolynom ist. Die Tabelle für das Verfahren von Jury lautet:

z^2	120	142	63	
	63	142	120	$\lambda_2 = \frac{63}{120}$
z^1	$120 - \frac{63^2}{120}$	$142(1-\frac{63}{120})$	0	
	$142(1-\frac{63}{120})$	$120 - \frac{63^2}{120}$	0	$\lambda_1 = \frac{142(1-\frac{63}{120})}{120(1-\left(\frac{63}{120}\right)^2)}$
z^0	$120 - \frac{63^2}{120} - \frac{142^2(1-\frac{63}{120})}{120(1+\left(\frac{63}{120}\right))} = \frac{50635}{1464}$			

Da alle Elemente der ersten Spalte positiv sind, ist das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises ein Einheitskreispolynom. Die Ausgangsfolge (y_k) zufolge der gegebenen Folge der Referenzgröße $(r_k) = \sin(\underbrace{\omega_0 T_a}_{=1} k + 35°) + 3(1^k)$ ergibt sich zu

$$(y_k) = \left|T_{r,y}(\exp(\underbrace{\omega_0 T_a}_{=1} I))\right| \sin\Big(k + 35° + \arg(T_{r,y}(\exp(\underbrace{\omega_0 T_a}_{=1} I)))\Big) + 3\lim_{z\to 1}(z-1)T_{r,y}(z)\frac{z}{z-1}$$

$$\approx 2.875\sin(k + 35° + 12.793°) + \frac{9}{2}.$$

Beispiel 26:
Die z-Übertragungsfunktion lautet

$$G(z) = 20 - 10\frac{T_a}{z-1} - 20\frac{(z-1)\left(z - e^{-\frac{1}{2}T_a}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T_a\right)\right)}{z^2 - 2ze^{-\frac{1}{2}T_a}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T_a\right) + e^{-T_a}}$$

bzw. mit $T_a = 1$s eingesetzt

$$G(z) = \frac{2.1z^2 - 4.8z - 3.177}{z^3 - 1.8z^2 + 1.2z - 0.37}.$$

Die q-Übertragungsfunktion berechnet sich zu

$$G^{\#}(q) = \frac{-0.87q^3 - 3.2q^2 + 15.3q - 10.8}{q(q^2 + 1.2q + 1.1)}.$$