Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 6 — Lösungen
VU Automatisierung - WS14/15

Beispiel 27: Für die Untersuchung der Beobachtbarkeit bzw. Erreichbarkeit mithilfe des PBH-Eigenvektortests werden die Rechtseigenvektoren $\mathbf{v}_i$ bzw. Linkseigenvektoren $\mathbf{w}_i^T$, $i = 1, 2, 3$ der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des zu untersuchenden Systems benötigt. Mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -5$ und den Bestimmungsgleichungen

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{w}_i^T\,(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) = \mathbf{0}$$

der Rechts- bzw. Linkseigenvektoren ergeben sich zum Beispiel die folgenden Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 14 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{w}_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{w}_2^T &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, & \mathbf{w}_3^T &= \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da damit die Bedingungen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{w}_i^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

erfüllt sind, ist das gegebene System sowohl vollständig beobachtbar als auch vollständig erreichbar.

Die Bestimmung der Hankelmatrix $\mathbf{H}[1, 2]$ erfordert die Ermittlung der Markov-Parameter des Systems. Alternativ kann von der Darstellung $\mathbf{H}[1, 2] = \mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{A})\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ Gebrauch gemacht werden. Mit

$$\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -6 \\ -6 & -32 & 24 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

führt dies auf

$$\mathbf{H}[1, 2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 30 \\ -6 & 30 & -142 \end{bmatrix},$$

womit unmittelbar die Regularität von $\mathbf{H}[1, 2]$ (und damit die vollständige Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems) sichtbar wird.

Beispiel 28: Die Erreichbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix des ersten Systems ergeben sich zu

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

die des zweiten zu

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 .$$

Es ist entweder direkt ersichtlich oder kann durch die Berechnung der Determinante leicht ermittelt werden, dass nur $\mathcal{R}_1$ vollen Rang hat. Daher ist das erste System vollständig erreichbar, aber nicht vollständig beobachtbar, das zweite System ist weder vollständig erreichbar noch vollständig beobachtbar. Die Übertragungsfunktion des ersten Systems muss demnach von der Ordnung 2 sein ($\mathrm{rang}\,(\mathcal{O}_1) = 2$), die des zweiten Systems von einer Ordnung ≤ 2. Die Berechnung der Übertragungsfunktion zu

$$G_1(s) = G_2(s) = \frac{2}{s^2 - 2s - 3}$$

zeigt, dass beide Übertragungsfunktionen gleich und von der Ordnung 2 sind.

Beispiel 29: Es zeigt sich, dass die Erreichbarkeitsmatrix den Rang 2 hat, damit ist nachgewiesen, dass das untersuchte System nicht vollständig erreichbar ist. Der erreichbare Unterraum wird dann zum Beispiel von den ersten beiden Spalten der Erreichbarkeitsmatrix aufgespannt, also

$$\mathcal{V}_r = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \middle| \mathbf{x} = \lambda_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} \right\} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Der nicht erreichbare Unterraum wird dementsprechnd von Vektoren $\mathbf{w}$ aufgespannt, die die Bedingungen $\mathbf{v}_1^T \mathbf{w} = 0$ und $\mathbf{v}_2^T \mathbf{w} = 0$ erfüllen, also zum Beispiel

$$\mathcal{V}_{nr} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \middle| \mathbf{x} = \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Die Steuerfolge, die das System innerhalb von zwei Abtastschritten aus jedem beliebigen Anfangszustand in den Ursprung überführt ist

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{4} x_{0,2} - \frac{5}{2} x_{0,3} \\ u_1 &= -\frac{1}{2} x_{0,2} + x_{0,3}. \end{aligned}$$

Die Existenz dieser Steuerfolge weist nach, dass das System vollständig steuerbar ist.

Beispiel 30: Beispielsweise mithilfe der Formel von Ackermann berechnet sich die Rückführung zu

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{37}{2} & -6 \end{bmatrix}.$$

Die Bestimmung des Vorfaktors g so, dass für eine stationäre Führungsgröße r stationäre Genauigkeit erreicht wird, ergibt

$$g = \frac{1}{\mathbf{c}^T(-\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{b}} = \frac{2}{3}\,.$$