

Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

Formelsammlung zum Skriptum Modellbildung

Kapitel 2

Polarkoordinaten:

$$x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$$

Kugelkoordinaten:

$$x(t) = r(t) \sin(\theta(t)) \cos(\varphi(t)), \quad y(t) = r(t) \sin(\theta(t)) \sin(\varphi(t)), \quad z(t) = r(t) \cos(\theta(t))$$

Resultierende Kraft in einem zentralen Kräftesystem:

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i$$

Drehmoment:

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y f_z - z f_y \\ z f_x - x f_z \\ x f_y - y f_x \end{bmatrix}$$

Resultierendes Moment bezüglich des Punktes A:

$$\boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i^{(A)} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,x}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,x}^{(A)}} \mathbf{e}_x + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,y}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,y}^{(A)}} \mathbf{e}_y + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,z}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,z}^{(A)}} \mathbf{e}_z$$

Masse eines Starrkörpers:

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}$$

Schwerpunkt eines Körpers:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \frac{\int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r} \rho_1(x, y, z) d\mathcal{V}_1 + \dots + \int_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j + \dots + \int_{\mathcal{V}_N} \mathbf{r} \rho_N(x, y, z) d\mathcal{V}_N}{m} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{r}_{S_j} m_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \end{aligned}$$

Impulserhaltung einer Punktmasse:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = \mathbf{f}$$

Translatorische kinetische Energie eines Starrkörpers:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S$$

Potentielle Energie:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} \quad \text{mit} \quad V(\mathbf{r}_I) = 0$$

Dissipative Kräfte

Körper in Fluid:	$f_D \mathbf{e}_v = -c_W A \frac{\rho_f}{2} v^2 \mathbf{e}_v$	Widerstandsbeiwert $c_W > 0$
Haftreibung:	$f_H = \mu_H f_N$	Haftreibungskoeffizient $\mu_H > 0$
Trockene Gleitreibung:	$f_C = \mu_C f_N \text{sign}(\dot{x})$	Gleitreibungskoeffizient $\mu_C > 0$
Rollwiderstand:	$f_R = \mu_R f_V$	Rollreibungskoeffizient $\mu_R > 0$
Viskose Reibung:	$f_r = \mu_V \Delta v$	viskoser Reibungskoeffizient $\mu_V > 0$
Seilreibung:	$f_{S2} = f_{S1} \exp(\mu \alpha)$	Haftreibungskoeffizient $\mu = \mu_H > 0$

Impulserhaltung für Körper mit veränderlicher Masse:

$$m(t) \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{f} - \mu \mathbf{w}(t)$$
$$\frac{d}{dt} m = -\mu$$

Drehimpulserhaltung:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}^{(0)} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}^{(0)}$$

Rotatorische kinetische Energie eines Starrkörpers:

$$T_r = \frac{1}{2} \theta_{zz} \dot{\varphi}^2$$

Massenträgheitsmoment

Für Drehungen um den Schwerpunkt S in der \mathbf{e}_z -Achse:

$$\theta_{zz}^{(S)} = \int_{\mathcal{V}} (r^{(S)})^2 dm = \int_{\mathcal{V}} \left((x^{(S)})^2 + (y^{(S)})^2 \right) dm$$

Verschiebung in einen allgemeinen Aufpunkt A (Satz von Steiner):

$$\theta_{zz}^{(A)} = \theta_{zz}^{(S)} + m \left((x_S^{(A)})^2 + (y_S^{(A)})^2 \right)$$

Kapitel 3

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Jedes thermodynamische System besitzt eine extensive Größe E_i , die *innere Energie*.

Die Änderung der inneren Energie entspricht der Summe der Änderung der zugeführten Wärme Q^1 und der Änderung der zugeführten Arbeit W^1 , d.h. es gilt¹

$$dE_i = Q^1 + W^1 .$$

Für abgeschlossene Systeme gilt $Q^1 = 0$ und $W^1 = 0$. Der erste Hauptsatz lautet damit

$$dE_i = 0 .$$

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Jedes thermodynamisches System besitzt eine extensive Größe S , die *Entropie*. Ihre Änderung bei einer *reversiblen Zustandsänderung* ergibt sich zu

$$dS = \frac{Q^1}{T} .$$

Bei allen *irreversiblen Zustandsänderungen* wird im Inneren des Systems Entropie produziert, d.h es gilt

$$dS \geq \frac{Q^1}{T} .$$

Gibbsche Fundamentalgleichung:

$$dS = \frac{1}{T} dE_i + \frac{p}{T} d\mathcal{V}$$

Differential der spezifischen inneren Energie:

$$de_i = \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_{\nu} dT + \left(T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\nu} - p \right) d\nu$$

Prozessführung

Prozessführung	Zustandsänderung	Zwangsbedingung eines idealen Gases
Isotherm	$T = \text{konst.}$	$\frac{p}{\rho} = \text{konst.}$
Isobar	$p = \text{konst.}$	$\rho T = \text{konst.}$
Isochor	$\mathcal{V} = \text{konst.}$	$\frac{p}{T} = \text{konst.}$
Adiabatisch	$c = 0$	$p\nu^\kappa = \text{konst.}, T\nu^{\kappa-1} = \text{konst.}, Tp^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \text{konst.}$
Polytrop	$c = \text{konst.}$	$p\nu^n = \text{konst.}, T\nu^{n-1} = \text{konst.}, Tp^{\frac{1-n}{n}} = \text{konst.}$

Spezifische Enthalpie:

$$h = e_i + p\nu$$

Spezifische Wärmekapazität:

$$c dT = q^1$$

bzw.

$$c = \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_{\nu} + \left(\left. \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \right|_T + p \right) \left. \frac{\partial \nu}{\partial T} \right|_p$$

¹Die Bezeichnungen Q^1 und W^1 kennzeichnen, dass diese Größen keine vollständigen Differentiale beschreiben, sondern sogenannte 1-Formen sind.

Spezifische Wärmekapazität für isochoren Prozess:

$$c_\nu = \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_\nu$$

bzw.

$$c_\nu = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p + \left(\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T - \nu \right) \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\nu.$$

Spezifische Wärmekapazität für isobaren Prozess:

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$$

bzw.

$$c_p = \left. \frac{\partial e_i}{\partial T} \right|_\nu + \left(\left. \frac{\partial e_i}{\partial \nu} \right|_T + p \right) \left. \frac{\partial \nu}{\partial T} \right|_p.$$

Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\rho(p) = \frac{p}{R_s T}$$

Spezifische inneren Energie und spezifische Enthalpie eines idealen Gases:

$$\begin{aligned} de_i &= c_\nu dT \\ dh &= c_p dT \end{aligned}$$

Zustandsgleichung einer Flüssigkeit:

$$\rho(p) = \rho_0 e^{-\alpha(T-T_0)} e^{\frac{p-p_0}{\beta}}$$

Spezifische innere Energie einer Flüssigkeit:

$$e_i(p, T) = c_\nu(T - T_0) + \frac{1}{\rho_0} \left(p_0 + \beta - T_0 \alpha \beta + (T \alpha \beta - p - \beta) e^{\alpha(T-T_0)} e^{-\frac{p-p_0}{\beta}} \right)$$

Carnotscher Kreisprozess

Wirkungsgrad für eine Carnotschen Rechtsprozess:

$$\eta_{CR} = \frac{|W_{ab}|}{Q_{zu}^{34}} = 1 + \frac{Q_{ab}^{12}}{Q_{zu}^{34}} = 1 - \frac{T_{ab}}{T_{zu}}$$

Wirkungsgrad für einen Carnotschen Linksprozess:

$$\eta_{CL} = \frac{|Q_{ab}^{43}|}{W_{zu}} = \frac{Q_{ab}^{43}}{Q_{ab}^{43} + Q_{zu}^{21}} = \frac{1}{1 - \frac{T_{zu}}{T_{ab}}} = \frac{T_{ab}}{T_{ab} - T_{zu}}$$

Massenerhaltung

Geschlossenes System:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = 0$$

Offenes System:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}^*(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}^*(t)} \rho(t, \mathbf{x})(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = 0$$

Änderung eines mit inkompressibler Flüssigkeit gefüllten Kontrollvolumens:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V} = \sum_i q_i$$

Änderung der Masse in einem zeitlich veränderlichen, mit kompressibler Flüssigkeit (oder Gas) gefüllten Volumen $\mathcal{V}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\rho(t)\mathcal{V}(t)) = \sum_i \dot{m}_i$$

Impulserhaltung

Geschlossenes System:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \sum_i \mathbf{f}_i$$

Offenes System:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}^*(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}^*(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \sum_i \mathbf{f}_i$$

Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} v^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$$

Energieerhaltung

Geschlossenes System:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t, \mathbf{x}) e_t(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \dot{Q} + \dot{W}$$

Offenes System:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}^*(t)} \rho \left(e_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v} + gz \right) d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}^*(t)} \rho \left(e_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{v} + gz \right) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \\ - \int_{\partial\mathcal{V}^*(t)} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} - \int_{\partial\mathcal{V}^*(t)} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} + \dot{W}_s \end{aligned}$$

Kapitel 4

Wärmestromdichte:

$$\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) = -\Lambda(\mathbf{x}, T) \cdot \nabla T(t, \mathbf{x})$$

Fouriersche Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \nabla \cdot (\Lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T(t, \mathbf{x})) + g(t, \mathbf{x}, T)$$

Fouriersche Wärmeleitungsgleichung für ein isotropes, homogenes Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit λ in

- kartesischen Koordinaten:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, x, y, z, T)$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, r, \varphi, z, T)$$

- Kugelkoordinaten:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + g(t, r, \theta, \varphi, T)$$

Dimensionslose Kennzahlen:

Kennzahl	Formel	Grenzschichtdicke lam.	Grenzschichtdicke turb.
Reynolds-Zahl	$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$	$\delta_u(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\delta_u(x) = 0.37 \text{Re}_x^{1/5}$
Prandtl-Zahl	$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$	$\delta_u(x) = \delta_T(x) \sqrt[3]{\text{Pr}}$	$\delta_u(x) = \delta_T(x)$
Nußelt-Zahl	$\text{Nu}_x = \dot{q}_x \frac{x}{(T_P - T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha_x x}{\lambda}$		

Gemittelte Wärmestromdichte:

$$\dot{q} = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{q}_x \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x \, dx (T_P - T_\infty) = \alpha (T_P - T_\infty)$$

Mittlere Nußelt-Zahl:

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \dot{q} \frac{L}{(T_P - T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha L}{\lambda} \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{\text{Re}_L} \varphi(\text{Pr}) & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\sqrt{\text{Re}_c} \varphi(\text{Pr}) + 0.0370 (\text{Re}_L^{4/5} - \text{Re}_c^{4/5}) \sqrt[3]{\text{Pr}} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\text{Nu}_{lam,L} & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\text{Nu}_{lam,x_c} + \frac{5}{4} (\text{Nu}_{tur,L} - \text{Nu}_{tur,x_c}) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Spektrale Strahlung eines schwarzen Körpers:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda = \frac{0.002897768 \text{ m K}}{T}$$

Emissions- und Absorptionsvermögen:

Spektrale Emissivität	$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda, b}(\lambda, T)} \in [0, 1]$
Spektraler Absorptionsgrad	$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda, a}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1]$
Spektraler Reflexionsgrad	$\rho_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda, r}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1]$
Spektraler Transmissionsgrad	$\tau_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda, t}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1]$

Totale Ausstrahlung:

$$E(T) = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda, b}(\lambda, T) d\lambda$$

Für einen schwarzen Strahler (Stefan-Boltzmann Gesetz):

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{\lambda, b}(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)} d\lambda = \sigma T^4$$

Definition des Sichtfaktors:

$$F_{ij} = \frac{J_{ji}}{A_i J_i} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{s_{ij}^2 \pi} dA_j dA_i$$

Reziprozitätsgesetz der Sichtfaktoren:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

Summationsregel der Sichtfaktoren:

$$1 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Von einer Oberfläche austretende Nettowärmestromdichte:

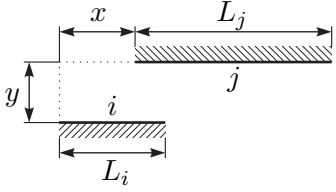
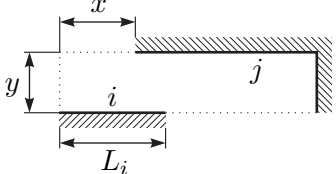
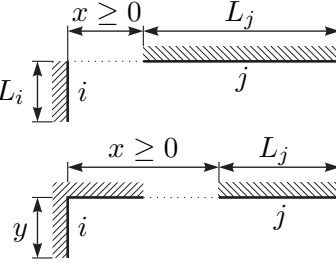
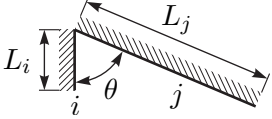
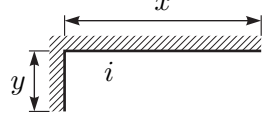
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \sigma \mathbf{T}^4 \\ &= \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} (\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \sigma \mathbf{T}^4 \end{aligned}$$

mit $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]_{i=1, \dots, N}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]_{i=1, \dots, N}$, $\mathbf{T}^4 = [T_i^4]_{i=1, \dots, N}$, $\mathbf{G} = [G_i]_{i=1, \dots, N}$ und $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, N}$

Sichtfaktoren von zwei-dimensionalen Strukturen:

$$F_{ij} = \frac{1}{a_i} \int_{a_i} \int_{a_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{2s_{ij}} da_j da_i = \frac{1}{2a_i} \int_{a_i} \sin(\theta_{i,1}) - \sin(\theta_{i,0}) da_i.$$

Einige Beispiele sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet:

$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(\sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$	
$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_i + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$	
$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_j + \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} \right)$	
$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_i + L_j - \sqrt{L_i^2 + L_j^2 - 2L_i L_j \cos(\theta)} \right)$	
$F_{ii} = 1 - \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y + x}$	

Stationäres Temperaturprofil in einer ebenen Wand:

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{\int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}}$$

Stationäre Wärmestromdichte in einer mehrschichtigen, ebenen Wand:

$$\dot{q} = k(T_{\infty,0} - T_{\infty,L}) \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_L}}$$

Stationäre Wärmestromdichte in einer mehrschichtigen, zylinderförmigen Wand:

$$\dot{q}(r) = (T_F - T_\infty) \frac{1}{r \underbrace{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}_{=k(r)}}$$

Vom Radius unabhängiger, auf die Rohrlänge bezogener Wärmestrom:

$$\dot{q}^\circ = (T_F - T_\infty) \frac{2\pi}{\underbrace{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}_{=k^\circ}}$$

Stationärer Temperaturverlauf eines Wärmetauschers:

$$T_h(x) = T_{h,1} + \frac{c_{p,c}\dot{m}_c(T_{c,1} - T_{h,1})}{c_{p,h}\dot{m}_h + c_{p,c}\dot{m}_c} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c}\right)K(x)\right) \right)$$

$$T_c(x) = T_{c,1} + \frac{c_{p,h}\dot{m}_h(T_{h,1} - T_{c,1})}{c_{p,h}\dot{m}_h + c_{p,c}\dot{m}_c} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{c_{p,h}\dot{m}_h} + \frac{1}{c_{p,c}\dot{m}_c}\right)K(x)\right) \right)$$

Gesamtwärmestrom des Wärmetauschers:

$$\dot{Q} = \dot{m}_h c_{p,h} (T_{h,1} - T_{h,2}) = \dot{m}_c c_{p,c} (T_{c,2} - T_{c,1}) = K(L) \Delta T_{\log}$$

mit

$$\Delta T_{\log} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$

Differenzenquotienten für gleichförmige Schrittweiten:

1. Ableitung, Vorwärtsdifferenz $y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$

1. Ableitung, Rückwärtsdifferenz $y'(x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$

1. Ableitung, zentrale Differenz $y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

2. Ableitung, zentrale Differenz $y''(x) = \frac{y(x - \Delta x) - 2y(x) + y(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

Finite Differenzen Methode für 1-dimensionales Wärmeleitproblem:

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t a}{\Delta x^2} (T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \quad j \geq 0, i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$T_0^{j+1} = T_0^j + \frac{2\Delta t a}{\Delta x^2} (T_1^j - T_0^j) \quad j \geq 0$$

mit den Anfangswerten

$$T_i^0 = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1$$

Analogie zwischen elektrischen und thermischen Netzwerken:

Elektrische Größe	Einheit	Thermische Größe	Variable	Einheit
Potentialdifferenz	V	Temperaturdifferenz	T	K
Elektrischer Strom	A	Wärmestrom	\dot{Q}	W
Elektrische Ladung	C	Enthalpie	H	J
Elektrischer Widerstand	Ω	Thermischer Widerstand	R	K/W
Elektrische Kapazität	F	Thermische Kapazität	C	J/K

Thermischer Widerstand:

$$\Delta T = R\dot{Q}$$

Thermische Kapazität:

$$\dot{T} = \frac{\dot{Q}}{C}$$

Cauer Modell des 1-dimensionalen Wärmeleitproblems:

$$\underbrace{\Delta x A \rho c_p}_{=C_i} \dot{T}_i(t) = A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i-1,i}}} (T_{i-1}(t) - T_i(t)) + A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i,i+1}}} (T_{i+1}(t) - T_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$\underbrace{\frac{\Delta x}{2} A \rho c_p}_{=C_0} \dot{T}_0(t) = A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{0,1}}} (T_1(t) - T_0(t))$$

Konstanten:

Konstante	Wert
Plancksche Konstante	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Lichtgeschwindigkeit	$c_0 = 2.998 \cdot 10^9 \text{ m s}^{-1}$
Boltzmann Konstante	$k = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 c_0^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W K}^4/\text{m}^2$

Parameter von Luft bei Normzustand:

Parameter	Variable	Wert
spez. Wärmekapazität	c_ν	0.718 kJ/(kg K)
spez. Wärmekapazität	c_p	1.005 kJ/(kg K)
spezifische Gaskonstante	$R_s = c_p - c_\nu$	287 J/(kg K)
Adiabatexponent	$\kappa = \frac{c_p}{c_\nu}$	1.4
Dichte	ρ_0	1.292 kg/m ³
Druck	p_0	101325 Pa
Temperatur	T_0	293.15 K