Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 01.07.2013

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	9	10	13	32
erreichte Punkte				

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie den Mechanismus aus Abbildung 1. 9 P.|

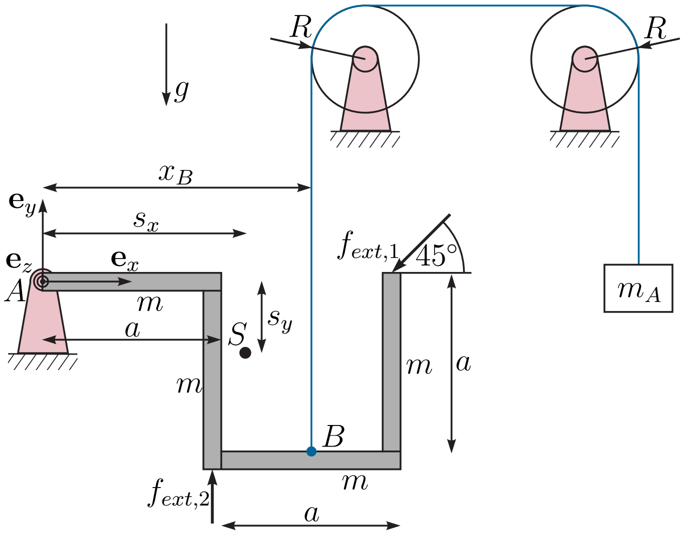

Abbildung 1: Einfacher Mechanismus.

Die dargestellte Trägerkonstruktion setzt sich aus vier gleichen Balken zusammen, die starr miteinander verbunden sind. Jeder der Balken weist die Masse m und die Länge a auf. Die Breite ist jeweils vernachlässigbar klein. Die Erdbeschleunigung wirkt in negativer $\mathbf{e}_y$-Richtung. Die Trägerkonstruktion ist einerseits an ihrem linken Ende drehbar an einem Auflager A befestigt und andererseits am Punkt B an einem als masselos angenommenen Seil aufgehängt. Es wirken zwei externe Kräfte mit Beträgen $f_{ext,1}$ und $f_{ext,2}$. Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgabenstellungen:

a) Berechnen Sie die Position des Schwerpunktes der Trägerkonstruktion in Form der Koordinaten s_x und s_y. 2 P.|

b) Das Seil ist gemäß Abbildung 1 über zwei reibungsfreie Umlenkrollen mit einer Masse m_A verbunden. Berechnen Sie für $x_B = \frac{3a}{2}$ die erforderliche Größe der Masse m_A, sodass sich der gesamte Mechanismus im statischen Gleichgewicht befindet. Berechnen Sie weiters die Kräfte im Auflager A in $\mathbf{e}_x$- und $\mathbf{e}_y$-Richtung. 4 P.|

c) Nehmen Sie nun an, dass anstatt der beiden Umlenkrollen feststehende Zylinder für die Führung des Seiles verwendet werden. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Seil und Zylindern sei μ_H. Die Masse m_A weise jenen Wert auf, bei dem sich das System entsprechend der Aufgabenstellung aus dem vorigen Unterpunkt b) im statischen Gleichgewicht befindet. Berechnen Sie den zulässigen Bereich für den Abstand x_B in der Form $x_{B,min} \leq x_B \leq x_{B,max}$, sodass das System nach wie vor im statischen Gleichgewicht ist (das Seil nicht rutscht). 3 P.|
Hinweis: Nehmen Sie an, dass bei einer Verschiebung des Aufhängepunktes B auch die feststehenden Zylinder um den gleichen Betrag mitverschoben werden, d.h. die Seilkraft im Punkt B wirkt immer in $\mathbf{e}_y$-Richtung.

Hinweise:

- Bitte fertigen Sie gegebenenfalls saubere Skizzen zu Ihren Berechnungen an, sodass alle verwendeten Größen klar und deutlich ersichtlich sind.
- Ein um einen feststehenden Zylinder geführtes masseloses Seil mit dem Umschlingungswinkel α rutscht nicht, wenn $f_{S1}e^{-\mu_H\alpha} \leq f_{S2} \leq f_{S1}e^{\mu_H\alpha}$ erfüllt ist.
- $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Im folgenden Beispiel wird die Badewanne aus Abbildung 2 betrachtet. Diese ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt. Am Boden der Wanne befindet sich ein Abflussrohr mit der konstanten Querschnittsfläche A_1. 10 P.|

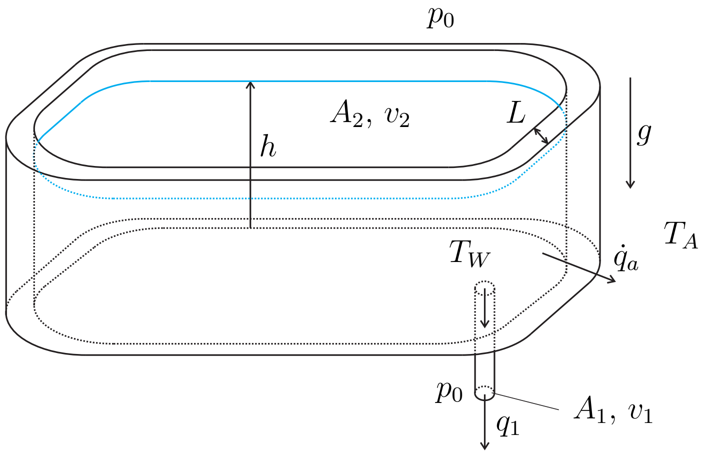

Abbildung 2: Mit Wasser gefüllte Badewanne.

a) Berechnen Sie ausgehend von der Bernoulli-Gleichung (1) eine Vereinfachung für stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit, 1 P.|

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}v^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + g\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0 \; . \tag{1}$$

b) Berechnen Sie den aus der Wanne abfließenden Volumenstrom q_1 und bestimmen Sie weiters eine Differentialgleichung für den Füllstand $h(t)$ in der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = f(h(t))$. 4 P.|
Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Umgebungsdruck p_0 konstant ist und vernachlässigen Sie die Länge des Abflussrohrs. Bei der Berechnung soll v_2 nicht vernachlässigt werden.

c) Ermitteln Sie die stationäre Wärmestromdichte $\dot{q}_a$ durch die Wand der Badewanne für ein 1-dimensionales Wärmeleitproblem. Die Badewanne hat die Wandstärke L und eine homogene und temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit λ. Das gesamte Wasser in der Badewanne hat die Wassertemperatur $T_W(t)$ und die Außentemperatur T_A ist konstant. Die Wärmeübertragung an den Kontaktflächen Wasser-Wand und Wand-Luft wird als ideal angenommen. 2 P.|
Hinweis: Stellen Sie sich den Mantel der Badewanne abgewickelt vor und lösen Sie das 1-dimensionale Wärmeleitproblem.

d) Im nächsten Schritt soll mithilfe der Wärmeleitgleichung der Abkühlvorgang des Wassers beschrieben werden. Die für die Wärmeleitung relevante Oberfläche der Wand wird mit A_W bezeichnet. Die Dichte ρ und die spezifische Wärmekapazität c_p des Wassers sind ebenfalls temperatur- und ortsunabhängig. Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem die Wassertemperatur T_1 erreicht ist, wenn die Anfangsbedingung der Wassertemperatur mit $T_W(0) = T_0$ gegeben ist und dafür $T_0 > T_1 > T_A$ gilt. 3 P.|
Hinweis: Nehmen Sie für diese Aufgabe an, dass der Ablauf geschlossen ist, d. h. $q_1 = 0$ und vernachlässigen Sie die Wärmeübertragung an der Wasseroberfläche und der Luft.

3. Betrachten Sie das in Abbildung 3 dargestellte mechanische System. In weiterer Folge sollen die für eine Auswertung der Euler-Lagrange Gleichungen mit den generalisierten Koordinaten q_1 und q_2 benötigten Terme berechnet werden. 13 P.|

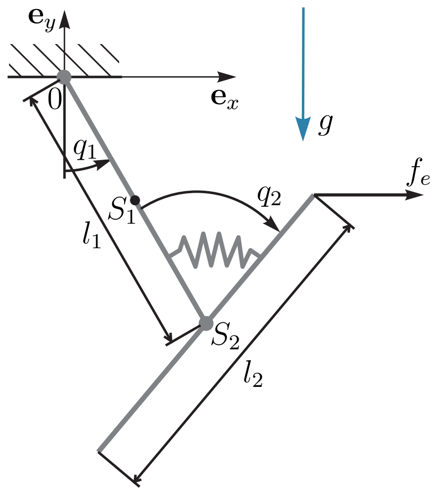

Abbildung 3: Mechanisches System.

Die beiden Pendelstäbe weisen die Längen l_1 und l_2, Massen m_1 und m_2 sowie die Massenträgheitsmomente Θ_1 und Θ_2 bezüglich ihres Schwerpunktes um die $\mathbf{e}_z$-Achse auf. Die Schwerpunkte S_1 und S_2 befinden sich jeweils in der Mitte der Pendelstäbe. Zwischen Stab 1 und 2 wirkt eine nichtlineare Drehfeder mit dem Drehmoment $M_f(q_2) = c_1 q_2^3$ und der Konstanten $c_1 > 0$. Am Ende des Stabes 2 wirkt eine externe eingeprägte Kraft f_e in $\mathbf{e}_x$-Richtung. Die Erdbeschleunigung wirkt in negativer $\mathbf{e}_y$-Richtung.

a) Stellen Sie die Ortsvektoren vom Ursprung 0 des in Abbildung 3 eingezeichneten Koordinatensystems zu den Schwerpunkten S_1 und S_2 der Pendelstäbe auf. Ermitteln Sie weiters die Schwerpunktsgeschwindigkeiten. 2 P.|

b) Berechnen Sie die kinetische Energie der beiden Pendelstäbe in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten q_1 und q_2 bzw. deren zeitlicher Ableitungen. 2 P.|

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie der beiden Pendelstäbe in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten q_1 und q_2. 2 P.|

d) Berechnen Sie die potentielle Energie V_f der Drehfeder. 2 P.|

e) Geben Sie allgemein die Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems in Form der Euler-Lagrange Gleichungen an. Setzen Sie dabei vorerst $f_e = 0$. 2 P.|
Hinweis: Sie müssen die Euler-Lagrange Gleichungen nicht explizit auswerten. Beschreiben Sie aber alle auftretenden Größen und geben Sie an wie sich diese aus den in den vorigen Unterpunkten ermittelten Ergebnissen berechnen lassen.

f) Betrachten Sie nun den Fall einer allgemeinen Kraft $f_e \neq 0$. Geben Sie deutlich an, welche zusätzlichen Terme dadurch in den im vorigen Unterpunkt angegebenen Bewegungsgleichungen des Systems dazukommen. Berechnen Sie diese zusätzlichen Beiträge zufolge von $f_e \neq 0$ explizit. 3 P.|

Hinweis: Bitte setzen Sie jeweils alle bekannten Größen ein und vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich. Insbesondere führt in den Unterpunkten 3a)-3d) sowie 3f) eine nur allgemeine Angabe von Berechnungen ohne explizite Auswertung zu Punkteabzug.