Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung am 01.07.2013

LÖSUNG

Aufgabe 1:

a) Die Position des Schwerpunktes errechnet sich zu $s_x = \frac{5}{4}a$ und $s_y = -\frac{1}{2}a$.

b) Im statischen Gleichgewicht gilt

$$
\begin{aligned}
m_A &= \frac{2}{3ag}\left[\frac{2f_{ext,1}a}{\sqrt{2}} + 4mgs_x - f_{ext,2}a\right] \\
f_{A,x} &= \frac{f_{ext,1}}{\sqrt{2}} \\
f_{A,y} &= \frac{f_{ext,1}}{\sqrt{2}} + 4mg - f_{ext,2} - m_A g.
\end{aligned}
$$

Die Auflagerkräfte $f_{A,x}$ und $f_{A,y}$ sind in Richtung von $\mathbf{e}_x$ bzw. $\mathbf{e}_y$ als positiv angenommen.

c) Die Grenzen des zulässigen Bereiches sind $x_{B,min} = \frac{3a}{2}e^{-\mu_H \pi}$ und $x_{B,max} = \frac{3a}{2}e^{\mu_H \pi}$.

Aufgabe 2:

a) Für den gegebenen Fall gilt

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \ , \ \rho = \text{konst.} \ .$$

Dadurch vereinfacht sich die gegebene Gleichung zu

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \ ,$$

womit

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}$$

entlang einer Strömungslinie gilt.

b) Aus der Massenerhaltung und durch Einsetzen in a) ergibt sich der ausfließende Volumenstrom

$$q_1 = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_2^2 - A_1^2}} \ .$$

Die gesuchte Differentialgleichung für die Höhe $h(t)$ errechnet sich zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = -A_1 \sqrt{\frac{2gh(t)}{A_2^2 - A_1^2}} \ .$$

c) Aufgrund der idealen Kontaktbedingungen gilt für die Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_W \to \infty$, $\alpha_L \to \infty$ und damit für die Randbedingungen $T(x=0) = T_W$, $T(x=L) = T_L$. Somit ergibt sich die Wärmestromdichte $\dot{q}_a$ der in Abbildung 1 skizzierten Wand der Dicke L mit der homogenen Wärmeleitfähigkeit λ

$$\dot{q}_a = \frac{\lambda}{L}(T_W - T_A) \ .$$

d) Aus

$$\frac{\mathrm{d}T_W}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{1}{\rho c_p A_2 h} A_W \frac{\lambda}{L}}_{\tau}(T_W - T_A) \ .$$

ergibt sich der zeitliche Temperaturverlauf der Wassertemperatur $T_W(t)$ zu

$$T_W(t) = (T_0 - T_A)\exp(-\tau t) + T_A \ ,$$

womit der Zeitpunkt t_1 bestimmt werden kann.

$$t_1 = -\frac{1}{\tau}\ln\frac{T_1 - T_A}{T_0 - T_A} = \frac{\rho c_p A_2 h L}{A_W \lambda}\ln\frac{T_0 - T_A}{T_1 - T_A}$$

Aufgabe 3:

a) Schwerpunktsvektoren:

$$\mathbf{r}_{S_1} = \frac{l_1}{2}\begin{bmatrix}\sin(q_1)\\ -\cos(q_1)\\ 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_{S_2} = l_1\begin{bmatrix}\sin(q_1)\\ -\cos(q_1)\\ 0\end{bmatrix}$$

Schwerpunktsgeschwindigkeiten:

$$\mathbf{v}_{S_1} = \frac{l_1}{2}\dot{q}_1\begin{bmatrix}\cos(q_1)\\ \sin(q_1)\\ 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{S_2} = l_1\dot{q}_1\begin{bmatrix}\cos(q_1)\\ \sin(q_1)\\ 0\end{bmatrix}$$

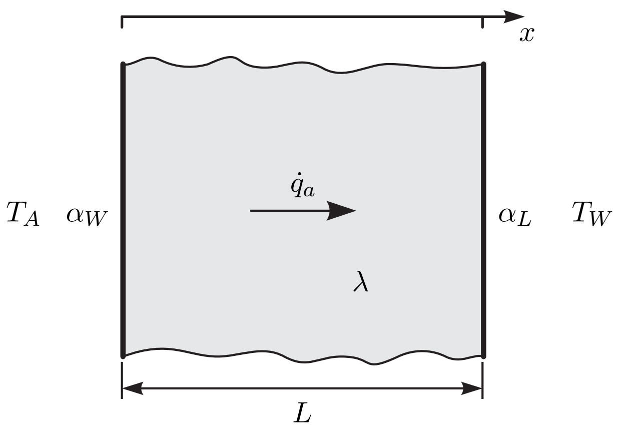

Abbildung 1: Stationäre Wärmeübertragung in ebener Wand.

b) $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{S_1}^T \mathbf{v}_{S_1} + \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \Theta_1 = \frac{1}{2}\left(m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \Theta_1\right)\dot{q}_1^2$

$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{S_2}^T \mathbf{v}_{S_2} + \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)^2 \Theta_2 = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 - \dot{q}_2\right)^2 \Theta_2$

c) $V_1 = -m_1 g \frac{l_1}{2} \cos(q_1)$

$V_2 = -m_2 g l_1 \cos(q_1)$

d) $V_f = c_1 \frac{q_2^4}{4}$

e) Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \tag{2}$$

$L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 - V_f$

f) Term auf rechter Seite von (1):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial q_1}\right)^T \begin{bmatrix} f_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_e \left(l_1 \cos(q_1) - \frac{l_2}{2}\cos(q_2 - q_1)\right)$$

Term auf rechter Seite von (2):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial q_2}\right)^T \begin{bmatrix} f_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_e \frac{l_2}{2}\cos(q_2 - q_1)$$