Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung am 27.09.2013

LÖSUNG

Aufgabe 1:

a)

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} s_1\cos(\varphi) \\ 0 \\ s_1\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} s_1\cos(\varphi) \\ 0 \\ s_1\sin(\varphi) - s_2 - \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} T_{B,R} &= \frac{1}{2}\Theta_{yy}^{(0)}\dot{\varphi}^2 \\ T_{S,T} &= \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^T\dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{s}_1^2 + s_1^2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{s}_1\dot{s}_2\sin(\varphi) - 2s_1\dot{s}_2\dot{\varphi}\cos(\varphi) + \dot{s}_2^2) \\ V_F &= \frac{1}{2}c(s_2 - s_{20})^2 \\ V_G &= mg(s_1\sin(\varphi) - s_2) \end{aligned}$$

c) $L = T_{B,R} + T_{S,T} - V_F - V_G$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}L - \frac{\partial}{\partial\varphi}L &= -\tau \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{s}_1}L - \frac{\partial}{\partial s_1}L &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{s}_2}L - \frac{\partial}{\partial s_2}L &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\theta_{yy}^{(0)} + ms_1^2\right)\ddot{\varphi} = m_2s_1\ddot{s}_2\cos\varphi - 2m_2\dot{s}_1s_1\dot{\varphi} - mgs_1\cos(\varphi) - \tau$$

Aufgabe 2:

a) stationäre Wärmestromdichte durch den Heizkörper:
$\dot{q} = \dfrac{1}{\frac{d_a}{\lambda_a} + \frac{d_b}{\lambda_b}}\left(T_b - T_a\right)$

b) $\dot{q}_0 - \underbrace{\sigma\varepsilon\left(T_a^4 - T_\infty^4\right)}_{\text{Strahlung}} - \underbrace{\alpha\left(T_a - T_\infty\right)}_{\text{freie Konvektion}} = 0$

Es tritt freie Konvektion auf. Bei der Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten α spielen die dimensionslosen Kennzahlen Gr (Grashof-Zahl), Pr (Prandtl-Zahl), Ra (Rayleigh-Zahl) und Nu (Nußelt-Zahl) eine Rolle.

c) Durch die Annahme $\varepsilon_h = \varepsilon_\infty = 1$ vereinfacht sich die Rechnung stark. Die Nettowärmestromdichte in die Pfanne ergibt sich zu
$\dot{q}_p = \sigma \varepsilon_p \left(T_p^4 - F_{ph} T_h^4 - F_{p\infty} T_\infty^4 \right)$
mit

$$F_{ph} = F_{hp} \frac{L}{d_p} \quad \text{Reziprozität}$$
$$F_{p\infty} = 1 - F_{ph} = 1 - F_{hp} \frac{L}{d_p} \quad \text{Summenregel}$$

Aufgabe 3:

a) Berechnung des Gesamtschwerpunkts aus den Schwerpunkten der Teilkörper unter Ausnutzung der Punktsymmetrie des Rahmens:

- Schwerpunkt des Rahmens:
  $\varphi = 0$: $\mathbf{r}_{r,0} = \frac{d}{2}\mathbf{e}_x + \left(\frac{l_1}{2} + d\right)\mathbf{e}_y = r_{r,x,0}\mathbf{e}_x + r_{r,y,0}\mathbf{e}_y$
  $\Rightarrow \quad \mathbf{r}_r(\varphi) = \left(r_{r,x,0}\cos(\varphi) - r_{r,y,0}\sin(\varphi)\right)\mathbf{e}_x + \left(r_{r,x,0}\sin(\varphi) + r_{m,y,0}\cos(\varphi)\right)\mathbf{e}_y$
- Schwerpunkt der Masse:
  $\varphi = 0$: $\mathbf{r}_{m,0} = (d + l_m)\,\mathbf{e}_x + d\mathbf{e}_y = r_{m,x,0}\mathbf{e}_x + r_{m,y,0}\mathbf{e}_y$
  $\Rightarrow \quad \mathbf{r}_m(\varphi) = \left(r_{m,x,0}\cos(\varphi) - r_{m,y,0}\sin(\varphi)\right)\mathbf{e}_x + \left(r_{m,x,0}\sin(\varphi) + r_{r,y,0}\cos(\varphi)\right)\mathbf{e}_y$

$\Rightarrow$ Gesamtschwerpunkt:
$\mathbf{r}(\varphi) = \frac{m_m r_{m,x}(\varphi) + m_r r_{r,x}(\varphi)}{m_m + m_r}\mathbf{e}_x + \frac{m_m r_{m,y}(\varphi) + m_r r_{r,y}(\varphi)}{m_m + m_r}\mathbf{e}_y$

b) Berechnung des Gesamtträgheitsmoments aus den Trägheitsmomenten der Teilkörper bezüglich ihres jeweiligen Schwerpunktes:

- Trägheitsmoment des senkrechten Teils:
  $m_{r,1} = \rho d b (l_1 + 2d), \Theta_{zz,1} = \frac{1}{12} m_{r,1}\left((l_1 + 2d)^2 + d^2\right)$
- Trägheitsmoment der waagerechten Teile:
  $m_{r,2} = m_{r,3} = \rho d b l_2, \Theta_{zz,2} = \Theta_{zz,3} = \frac{1}{12} m_{r,2}\left(l_2^2 + d^2\right)$

$\Rightarrow$ Gesamtträgheitsmoment:

$$\begin{aligned}
\Theta_{zz,A} =& \Theta_{zz,1} + 2\Theta_{zz,2} + m_m r_{m,A}^2 + \\
& r_{1,A}^2 m_{r,1} + r_{2,A}^2 m_{r,2} + r_{2,A}^2 m_{r,2} \\
=& \Theta_{zz,1} + 2\Theta_{zz,2} + m_m (d^2 + (d + l_m)^2) + \\
& m_{r,1}\left(\left(\frac{l_1}{2} + d\right)^2 + \frac{d^2}{4}\right) + m_{r,2}\left(\frac{l_2^2}{4} + \left(l_1 + \frac{3d}{2}\right)^2\right) + m_{r,2}\left(\frac{d^2}{4} + \left(d + \frac{l_2}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

c) Drallsatz
$\Theta_{zz,A}\ddot{\varphi} + m_r g r_{r,x}(\varphi) + m_m g r_{m,x}(\varphi) + F_c l_2 = 0$
mit $F_c = c\Delta l$

d) Massenerhaltung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathcal{V}} \rho \mathcal{V}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V_0 + A_B h\right) = A_B \dot{h} = q_1 - q_2 - A_2 \dot{l}_z$$

Bernoulli-Gleichung mit $v_1 = \dot{h}$ und $v_2 = \dot{l}_Z$:

$$\frac{1}{2}\dot{h}^2 + \frac{p_0}{\rho} + g(l_R + h) = \frac{1}{2}\dot{l}_Z^2 + \frac{p_2}{\rho} + g l_Z$$

e)

$$F_Z = F_G = p_2 A_2 - p_T A_1$$

Aus Bernoulli-Gleichung (stationär):

$$p_2 = \rho g(l_R + h - l_Z) + p_0$$

Einsetzen in Zylinderkraft und auf Höhe umformen

$$h = \frac{1}{A_2 \rho g}(F_G - A_2 p_0 + p_T A_1) - l_R + l_Z$$

f)

$$\dot{l}_Z = \dot{\varphi}(l_2 + d), \qquad \dot{h} = \frac{q_1 - A_2 \dot{l}_Z}{A_B}$$
$$q_1 = A_2 \dot{l}_z + A_B \sqrt{\dot{l}_Z^2 + \frac{2}{\rho}\left(\frac{F_G + p_T A_1}{A_2} - p_0\right) + 2g(l_Z - l_R - h)}$$