Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 29.11.2013

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	7	9	11	5	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Betrachtet wird ein hydro-pneumatischer Kolbenspeicher, siehe Abbildung 1. 7 P.|

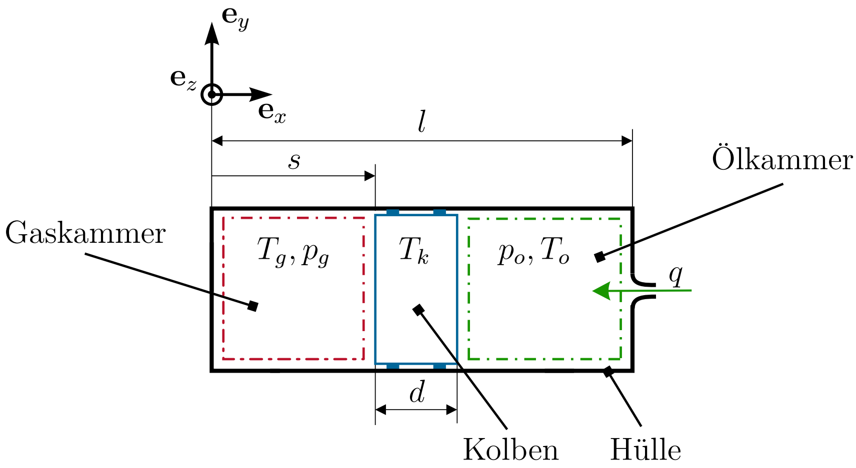

Abbildung 1: Hydro-pneumatischer Kolbenspeicher.

Der Kolbenspeicher, mit der Länge l und der Querschnittsfläche A, besteht aus einer adiabatisch isolierten Hülle, einer Gas- und einer Ölkammer sowie aus einem beweglichen Kolben, der die Länge d und die Masse m_k hat. Folgende Annahmen werden getroffen: (i) Die Druck- und Temperaturverteilung in den Kammern ist homogen. (ii) Die Dichtung des Kolbens ist ideal. Es treten keine Leckagen und keine Reibung auf. (iii) Die Öltemperatur ist konstant. (iv) Das Gas ist ideal.

Die Ortskoordinate zum Kolben ist mit s bezeichnet und der Kolben besitzt die Temperatur T_k. Die Gaskammer kann anhand der Gastemperatur T_g und des Gasdruckes p_g, die Ölkammer anhand der Öltemperatur T_o und des Öldruckes p_o, beschrieben werden. In die Ölkammer fließt ein Volumenstrom q.

a) Geben Sie die Impulserhaltung für den Kolben an. 1 P.|

b) Geben Sie die Massenerhaltung für die Ölkammer an und leiten Sie mithilfe des Materialgesetzes $\dot{\rho}_o = (\rho_o \dot{p}_o)/\beta$, wobei ρ_o die Dichte und β das konstante Kompressionsmodul des Öls bezeichnen, die Differentialgleichung für den Öldruck p_o her. 2 P.|

c) Geben Sie die Massenerhaltung für die Gaskammer an und leiten Sie mithilfe des Materialgesetzes $\dot{\rho}_g = (\rho_g \dot{p}_g)/(\kappa p_g)$, wobei ρ_g die Dichte und κ den konstanten Adiabatenexponenten des Gases bezeichnen, die Differentialgleichung für den Gasdruck p_g her. 2 P.|

d) Geben Sie die Energieerhaltung für den Kolben an. Berücksichtigen Sie dabei die Wärmeströme $\dot{Q}_{g,k} = \alpha_{g,k} A (T_k - T_g)$ und $\dot{Q}_{o,k} = \alpha_{o,k} A (T_k - T_o)$. Hierbei bezeichnen $\alpha_{g,k}$ und $\alpha_{o,k}$ die jeweiligen Wärmeübergangskoeffzienten. Leiten Sie die Kolbentemperaturdifferentialgleichung mithilfe der kalorischen Zustandsgleichungen $\mathrm{d}e_{i,k} = c_p \mathrm{d}T_k$, wobei $e_{i,k}$ die spezifische innere Energie und c_p die spezifische Wärmekapazität bezeichnen, her. Vernachlässigen Sie die kinetische Energie des Kolbens. 2 P.|

2. Betrachtet wird eine Reibkupplung wie sie in Abbildung 2 dargestellt ist. 9 P.|

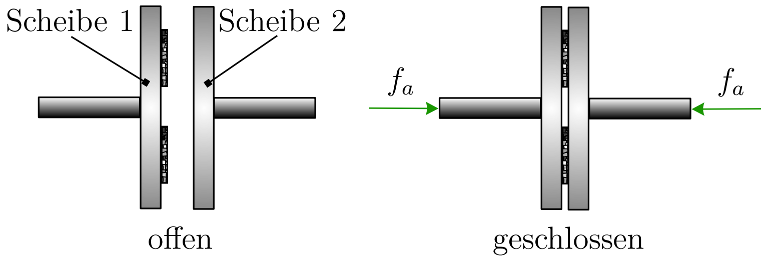

Abbildung 2: Reibkupplung.

Die Reibkupplung besteht aus zwei Scheiben mit den Massenträgheitsmomenten θ_1 und θ_2. Auf der Scheibe 1 ist eine Reibscheibe angebracht, an welcher ein Reibmoment τ_r wirkt. Auf die Scheiben wirkt eine Anpresskraft f_a und zusätzlich wirkt auf die Scheibe 1 ein Antriebsmoment τ_a und auf die Scheibe 2 ein Lastmoment τ_l.

a) Schneiden Sie die Reibkupplung frei und tragen Sie alle externen Kräfte bzw. Momente und Schnittkräfte sowie Schnittmomente ein. Verwenden Sie dazu die Skizze in Abbildung 3. 2 P.|

Abbildung 3: Skizze zum Freischneiden der Reibkupplung.

b) Im Folgenden soll lediglich die rotatorische Bewegung der einzelnen Scheiben untersucht werden. Führen Sie dazu generalisierte Koordinaten ein, tragen Sie diese in die Skizze in Abbildung 3 ein und geben Sie die Drehimpulserhaltungssätze für beide Scheiben an. 2 P.|

c) Lösen Sie die Differentialgleichungen, welche sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz nach Aufgabe 2.b) ergeben. Gehen Sie dabei von zeitlich konstanten Kräften und Momenten aus. 2 P.|

d) Berechnen Sie die Kuppelzeit t_k, für die die Kupplung nicht mehr gleitet und damit die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben gleich sind. 1 P.|

e) Berechnen Sie das Reibmoment τ_r. Gehen Sie dazu von einem differentiellen Reibmoment $\mathrm{d}\tau_r = r^2 \mu \frac{f_a}{A} \mathrm{d}r \mathrm{d}\psi$ aus, vgl. Abbildung 4. Dabei bezeichnen μ den Reibungskoeffizienten, r den Radius und A die Fläche der Reibscheibe. 2 P.|

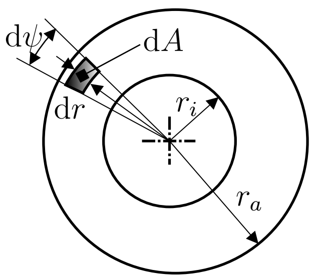

Abbildung 4: Reibscheibe.

3. Es wird nun das mechanische System aus Abbildung 5 betrachtet. Der Wagen hat 11 P.|

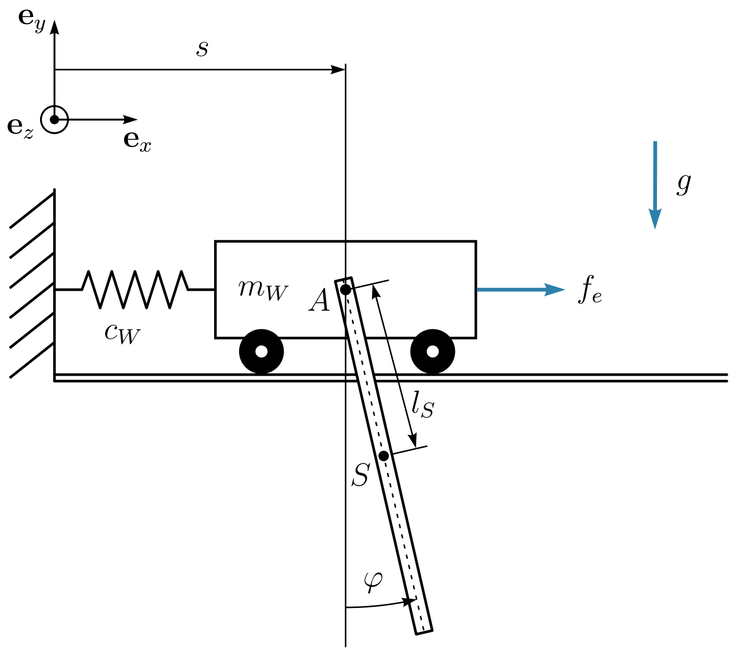

Abbildung 5: Mechanisches System.

die Masse m_W, wird über eine Antriebskraft f_e angetrieben und ist mit einer linearen Feder, mit der Federkonstanten $c_W > 0$ sowie der entspannten Länge s_{W0}, gegenüber dem Inertialsystem befestigt. Im Weiteren sei angenommen, dass die Reibung näherungsweise durch eine geschwindigkeitsproportionale Kraft der Form $f_R = -d_R \dot{s}$ mit $d_R > 0$ beschrieben werden kann. Der reibungsfrei gelagerte Pendelstab besitzt die Masse m_S und das Massenträgheitsmoment $\theta_{S,zz}^{(S)}$ um seinen Schwerpunkt.

a) Geben Sie den Vektor zum Schwerpunkt S des Pendelstabes an. Ermitteln Sie weiters den Vektor der Schwerpunktsgeschwindigkeit des Pendelstabes. 2 P.|

b) Ermitteln Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten und deren zeitlichen Ableitungen. Vereinfachen Sie dabei den Ausdruck für den translatorischen Anteil soweit als möglich. 2 P.|

c) Bestimmen Sie die in der Feder gespeicherte potentielle Energie. Nehmen Sie dazu an, dass die potentielle Energie der Feder im entspannten Zustand gleich Null ist. 1 P.|

d) Berechnen Sie die potentielle Energie des Pendelstabes in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten. Nehmen Sie dazu an, dass die potentielle Energie des Pendelstabes für $\varphi = 0$ verschwindet. 1 P.|

e) Geben Sie die Lagrange-Funktion an. 1 P.|

f) Leiten Sie mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismusses die Bewegungsgleichungen des Systems her. 4 P.|
Hinweis: Schreiben Sie die hierfür benötigten Ableitungsterme einzeln an.

4. Betrachten Sie zunächst den in Abbildung 6 dargestellten Halbkreis. 5 P.|

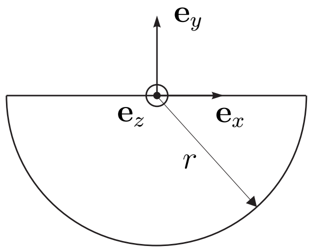

Abbildung 6: Geometrie eines Halbkreises.

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Halbkreises im xy-Koordinatensystem. Nützen Sie dabei die vorhandene Symmetrie aus, um den Rechenaufwand zu minimieren! 2.5 P.|
Hinweis: Allgemein ergibt sich der Schwerpunktsvektor $\mathbf{r}_S$ in der Form

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{A} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ vom Ursprung 0 des Koordinatensystems.

Im Weiteren soll das Massenträgheitsmoment einer Kugel, mit der konstanten Dichte ρ und dem Radius R, bezüglich ihres Mittelpunktes bestimmt werden. Hierfür bietet es sich an, Kugelkoordinaten in der Form

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\psi), \quad y = r\sin(\varphi)\sin(\psi), \quad z = r\cos(\psi)$$

einzuführen, siehe Abbildung 7.

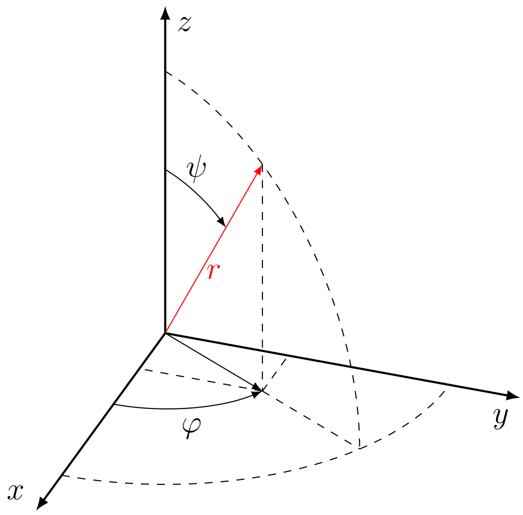

Abbildung 7: Kugelkoordinaten.

Weiterhin gilt für das differentielle Volumselement $\mathrm{d}\mathcal{V}$ und das differentielle Massenelement $\mathrm{d}m$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{V} &= r^2 \sin(\psi) \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\psi \\ \mathrm{d}m &= \rho \mathrm{d}\mathcal{V}\,. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass sich das Massenträgheitsmoment einer Kugel bezüglich ihres Mittelpunktes in der Form 2.5 P.

$$\theta = \frac{2}{3} \int_{\mathcal{V}} r^2 \mathrm{d}m$$

ergibt. Berechnen Sie anschließend explizit das Massenträgheitsmoment der Kugel mithilfe der angegebenen Beziehung.
Hinweis: Nutzen Sie dabei den Zusammenhang $\theta = \theta_{xx}^{(0)} = \theta_{yy}^{(0)} = \theta_{zz}^{(0)}$ aus.