

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 31.01.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	9	6.5	10.5	6	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Aus einem großen Reservoir (Druck p_a , Geschwindigkeit $v_a = 0$) tritt über eine reibungsfreie Rohrleitung ein senkrechter Freistrahл aus, der auf eine Kugelkalotte (Masse m , Öffnungswinkel 2α) trifft. Der Aufbau ist in Abbildung 1 dargestellt. Ein Freistrahл ist eine Strömung aus einer Düse in die freie Umgebung (es gilt daher $p = p_0$).

Gegeben: $h, p_a, A_b, p_0, \rho, \alpha, m, g$

9 P. |

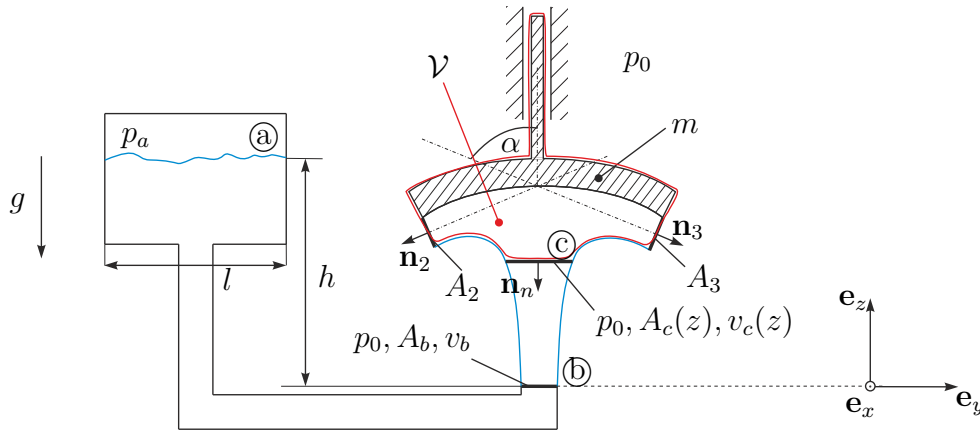


Abbildung 1: Senkrechter Freistrahл.

Annahmen:

- Es wird eine nicht viskose, inkompressible, stationäre Strömung angenommen, d.h. die Dichte ρ und die Geschwindigkeit \mathbf{v} sind nicht von der Zeit abhängig.
- Das Kontrollvolumen \mathcal{V} ist zeitlich konstant.

Gesucht ist die Höhe z_G , auf der die Kugelkalotte im Gleichgewicht gehalten wird. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- a) Geben Sie die Bernoulli-Gleichung für eine Strömungslinie von ① nach ② an. 1 P. | Berechnen Sie daraus die Strömungsgeschwindigkeit v_b am Austritt der Düse.
- b) Geben Sie die Bernoulli-Gleichung für eine Strömungslinie von ② nach ③ an. 1 P. | Berechnen Sie daraus die Strömungsgeschwindigkeit des Strahles $v_c(z)$ in der Höhe z .
Hinweis: Der Abstand zwischen ② und ③ wird als z bezeichnet.
- c) Für die weiteren Betrachtungen gilt die Annahme einer idealen Umlenkung 3 P. | (kein Energieverlust durch Reibung). Außerdem können Sie annehmen, dass die potentielle Energie am Eintritt und Austritt des Wasserstrahls gleich ist. Bestimmen Sie die Normalvektoren \mathbf{n}_n , \mathbf{n}_2 und \mathbf{n}_3 sowie die Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_2 und \mathbf{v}_3 für den ebenen Fall (yz -Ebene).
- d) Schreiben Sie die Massenerhaltung zwischen den Punkten ② und ③ an. Lösen 1 P. | Sie die Gleichung nach $A_c(z)$ auf.
- e) Stellen Sie die Impulserhaltung in z -Richtung für das Kontrollvolumen \mathcal{V} auf. 2 P. | Dabei wird angenommen, dass gilt $A_2 = A_3 = \frac{A_c(z)}{2}$.

Hinweis:

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum f$$

f) Ermitteln Sie die Position z_G , für welche sich die vertikalen Kräfte im Gleichgewicht befinden. Nutzen Sie dazu die vorher ermittelten Ergebnisse. 1 P.

a)

$$p_a + \rho g h = p_0 + \rho \frac{v_b^2}{2}$$

$$v_b = \sqrt{2gh + \frac{2(p_a - p_0)}{\rho}}$$

b)

$$p_0 + \rho \frac{v_b^2}{2} = p_0 + \rho g z + \rho \frac{v_c^2(z)}{2}$$

$$v_c(z) = \sqrt{v_b^2 - 2gz}$$

c)

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ v_c(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -v_c(z) \sin(\alpha) \\ -v_c(z) \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_c(z) \sin(\alpha) \\ -v_c(z) \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

d)

$$\rho v_b A_b = \rho v_c(z) A_c(z)$$

$$A_c(z) = \frac{v_b A_b}{v(z)}$$

e)

$$\rho \int_{A_c(z)} \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{n}_n) dA + \rho \int_{A_2} \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA + \rho \int_{A_3} \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA = [0, -mg]^T$$

$$-\rho v_c^2(z) A_c(z) - \rho v_c^2(z) \cos(\alpha) (A_2 + A_3) = -mg$$

f)

$$-\rho v_c^2(z) A_c(z) - 2\rho v_c^2(z) \cos(\alpha) \frac{A_c(z)}{2} = -mg$$

mit

$$A_2 = A_3 = \frac{A_c(z)}{2}$$

folgt

$$\rho (v_b^2 - 2gz_G) \frac{A_b v_b}{\sqrt{v_b^2 - 2gz_G}} + \rho (v_b^2 - 2gz_G) \cos(\alpha) \frac{A_b v_b}{\sqrt{v_b^2 - 2gz_G}} = -mg$$

$$\rho (v_b^2 - 2gz_G) \frac{A_b v_b}{\sqrt{v_b^2 - 2gz_G}} (1 + \cos(\alpha)) = -mg$$

$$v_b^2 - 2gz_G = \left(\frac{-mg}{\rho A_b v_b (1 - \cos(\alpha))} \right)^2$$

$$z_G = \frac{1}{2g} \left(v_b^2 - \left(\frac{-mg}{\rho A_b v_b (1 + \cos(\alpha))} \right)^2 \right)$$

2. Bei der Auswahl der Fenster für ein neues Wohnhaus steht man vor der Entscheidung, konventionelle Fenster mit einer Einfachverglasung oder teurere Fenster mit einer Doppelverglasung zu wählen. Ein typisches Fenster mit Doppelverglasung ist in Abbildung 2 dargestellt.

6.5 P. |

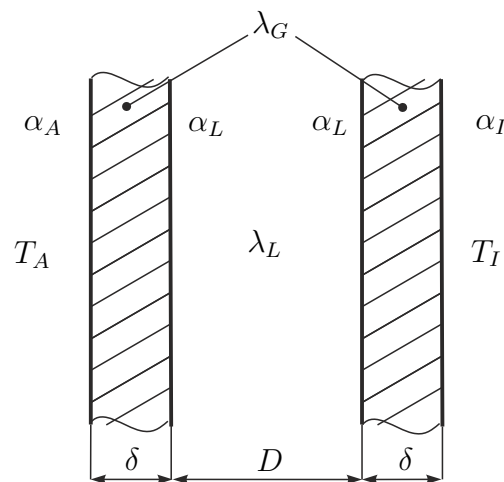


Abbildung 2: Querschnitt einer Doppelverglasung.

Gegeben:

α_A ...	Wärmeübergangskoeffizienten außen	[W/m ² K]
α_I ...	Wärmeübergangskoeffizienten innen	[W/m ² K]
α_L ...	Wärmeübergangskoeffizienten Fenster	[W/m ² K]
D ...	Dicke des Luftspalts	[m]
λ_G ...	Wärmeleitfähigkeit von Quarzglas	[W/mK]
δ ...	Dicke einer Glasscheibe	[m]
λ_L ...	Wärmeleitfähigkeit von Luft	[W/mK]

Zunächst wird lediglich das Fenster mit Doppelverglasung betrachtet wobei der Wärmeübergangskoeffizient im Scheibenzwischenraum vernachlässigt wird, d.h. $\alpha_L \rightarrow \infty$.

- a) Führen sie geeignete Bezeichnungen für die Temperaturen in den jeweiligen Randschichten ein und tragen Sie diese in die Abbildung 2 ein. Zeichnen Sie auch einen typischen Temperaturverlauf für den Fall $T_I > T_A$ ein. Stellen Sie die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Wärmestromdichten und den benachbarten Temperaturen auf. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den einzelnen Wärmestromdichten? 3 P. |
- b) Nutzen Sie die obigen Ergebnisse und leiten Sie damit den Wärmeübergangskoeffizienten k_D des Fensters mit Doppelverglasung her. 2.5 P. |
- c) Geben Sie einen Ausdruck für das Verhältnis der Wärmeübergangskoeffizienten $\frac{k_E}{k_D}$ der beiden Fensterarten an (k_E ist der Wärmeübergangskoeffizient für ein Fenster mit Einzelverglasung). 1 P. |

a)

$$\begin{aligned}\dot{q}_{01} &= \alpha_I (T_I - T_1) \\ \dot{q}_{12} &= \frac{\lambda_G}{\delta} (T_1 - T_2) \\ \dot{q}_{23} &= \frac{\lambda_L}{D} (T_2 - T_3) \\ \dot{q}_{34} &= \frac{\lambda_G}{\delta} (T_3 - T_4) \\ \dot{q}_{45} &= \alpha_A (T_4 - T_A) \\ \dot{q}_D &= \dot{q}_{01} = \dot{q}_{12} = \dot{q}_{23} = \dot{q}_{34} = \dot{q}_{45}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}T_1 &= T_I - \frac{1}{\alpha_I} \dot{q}_{01} = T_I - \frac{1}{\alpha_I} \dot{q}_D \\ T_2 &= T_1 - \frac{\delta}{\lambda_G} \dot{q}_D = T_I - \left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} \right) \dot{q}_D \\ T_3 &= T_2 - \frac{D}{\lambda_L} \dot{q}_D = T_I - \left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} \right) \dot{q}_D \\ T_4 &= T_3 - \frac{\delta}{\lambda_G} \dot{q}_D = T_I - \left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{2\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} \right) \dot{q}_D \\ T_A &= T_I - \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{2\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} + \frac{1}{\alpha_A} \right)}_{\frac{1}{k_D}} \dot{q}_D\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_E} &= \left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A} \right) \\ \frac{k_E}{k_D} &= \frac{\frac{1}{\alpha_I} + \frac{2\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} + \frac{1}{\alpha_A}}{\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A}}\end{aligned}$$

3. Es wird nun das mechanische Feder-Masse-Dämpfer System aus Abbildung 3 betrachtet. 10.5 P. |

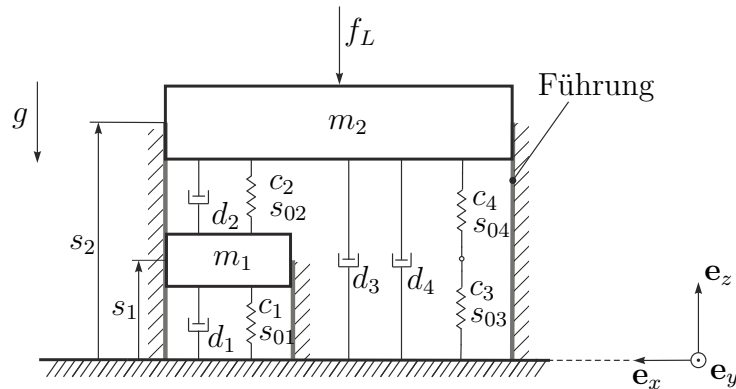


Abbildung 3: Feder-Masse-Dämpfer System mit zwei Massen.

Gegeben sind die Massen m_1 und m_2 , die linearen Dämpferelemente mit den positiven Dämpfungskoeffizienten d_1 , d_2 , d_3 und d_4 , die linearen Federelemente mit den positiven Federsteifigkeiten c_1 , c_2 , c_3 und c_4 sowie den entspannten Federlängen s_{01} , s_{02} , s_{03} und s_{04} . Auf beide Massen wirkt die Erdbeschleunigung g . Die Massen sind ideal (reibungsfrei) geführt und somit wird eine Verdrehung der Massen verhindert. Es kann damit nur eine Bewegung in z -Richtung stattfinden, siehe dazu auch Abbildung 3.

- a) Fassen Sie die in Serie geschalteten Federn zu einem Ersatzfederelement mit der Steifigkeit \tilde{c} und die parallel geschalteten Dämpfer, mit den Dämpfungskoeffizienten d_3 und d_4 , zu einem Ersatzdämpferelement mit dem Dämpfungskoeffizienten \tilde{d} zusammen. Geben Sie auch die entspannte Länge \tilde{s}_0 der Ersatzfeder an. 1.5 P. |
- b) Wenden Sie nun den Impulserhaltungssatz auf beide Massen in z -Richtung an. Berücksichtigen Sie auch die auf die Masse 2 wirkende Kraft f_L . 2 P. |
- c) Stellen Sie mit den soeben ermittelten Differentialgleichungen ein mathematisches Modell in kompakter Matrixschreibweise auf. Dabei sollen auf der linken Seite die Massenmatrix \mathbf{M} , die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} vorkommen. Die rechte Seite soll in der Form $\mathbf{k} + \mathbf{b}f_L$ mit den konstanten Vektoren \mathbf{k} und \mathbf{b} dargestellt werden. Es gilt $\mathbf{q} = [s_1, s_2]^T$. 2 P. |
- d) Berechnen Sie die erforderliche Kraft f_L , damit sich die stationäre Position der Masse 2 zu h ergibt. Welche stationäre Position stellt sich für die Masse 1 ein? 1 P. |

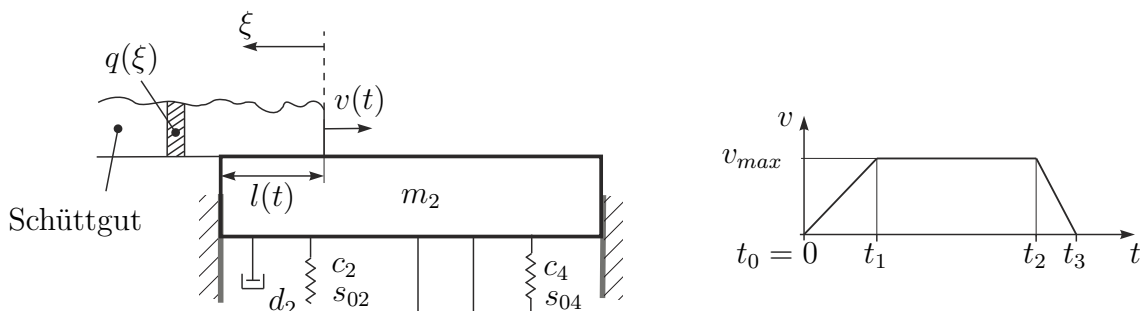


Abbildung 4: Schüttgutbeförderung mit Geschwindigkeitsprofil.

Ein nicht eingezeichnetes Förderband transportiert mit dem in Abbildung 4 dargestellten Geschwindigkeitsprofil Schüttgut vom linken Rand auf die Masse 2. Das Schüttgut wird als Linienlast $q(\xi) = 1 + \cos(\xi)$ mit der Einheit N/m eingeführt (es gilt die Beziehung $df_L = q(\xi)d\xi$). Für die folgenden Berechnungen wird ein körperfestes Koordinatensystem verwendet, welches sich wie in Abbildung 4 dargestellt, mit dem Schüttgut mitbewegt.

- e) Das Schüttgut läuft nun zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Geschwindigkeitsprofil aus Abbildung 4 vom linken Rand der Masse 2 in negative ξ -Richtung. Stellen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ sowie den zurückgelegten Weg $l(t)$ für die einzelnen Teilabschnitte als Funktion der Zeit dar. 3 P. |
- f) Welche Kraft f_L stellt sich damit als Funktion der Zeit t ein? 1 P. |
Hinweis: Sie brauchen den Ausdruck für $l(t)$ nicht in die Gleichung einsetzen.

a)

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= \frac{c_3 c_4}{c_3 + c_4} \\ \tilde{s} &= s_{03} + s_{04} \\ \tilde{d} &= d_3 + d_4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{s}_1 &= -m_1 g - c_1 (s_1 - s_{01}) - d_1 \dot{s}_1 + c_2 (s_2 - s_1 - s_{02}) + d_2 (\dot{s}_2 - \dot{s}_1) \\ m_2 \ddot{s}_2 &= -m_2 g - c_2 (s_2 - s_1 - s_{02}) - d_2 (\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - \tilde{c} (s_2 - \tilde{s}) - \tilde{d} \dot{s}_2 - f_L\end{aligned}$$

c)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & \tilde{d} + d_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + \tilde{c} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 g + c_1 s_{01} - c_2 s_{02} \\ -m_2 g + \tilde{c} \tilde{s} + c_2 s_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} f_L$$

d)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + \tilde{c} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} s_1 \\ h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 g + c_1 s_{01} - c_2 s_{02} \\ -m_2 g + \tilde{c} \tilde{s} + c_2 s_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} f_L$$

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2) s_1 - c_2 h &= k_1 \\ -c_2 s_1 + (c_2 + \tilde{c}) h &= k_2 - f_L\end{aligned}$$

woaus folgt

$$\begin{aligned}f_L &= \frac{c_2 (k_1 + c_2 h)}{c_1 + c_2} - (c_2 + \tilde{c}) h + k_2 \\ s_1 &= \frac{k_1 + c_2 h}{c_1 + c_2}\end{aligned}$$

e)

$$v(t) = \begin{cases} \frac{v_{max} t}{t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ v_{max} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{-v_{max} t}{t_3 - t_2} + \underbrace{\left(\frac{v_{max} t_2}{t_3 - t_2} + v_{max} \right)}_n & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

zeitliche Integration liefert

$$l(t) = \begin{cases} \frac{v_{max} t^2}{2t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \underbrace{\frac{v_{max} t_1}{2}}_{l(t_1)} + v_{max} (t - t_1) & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \underbrace{\frac{v_{max} t_1}{2} + v_{max} (t_2 - t_1)}_{l(t_2)} + \frac{-v_{max} (t^2 - t_2^2)}{2(t_3 - t_2)} + n (t - t_2) & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

oder vereinfacht

$$l(t) = \begin{cases} \frac{v_{max}t^2}{2t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2} + v_{max}(t - t_1)}_{l(t_1)} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2} + v_{max}(t_2 - t_1) - \frac{v_{max}(t-t_2)^2}{2(t_3-t_2)}}_{l(t_2)} + v_{max}(t - t_2) & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

f)

$$\begin{aligned} f_L(l(t)) &= \int_0^{l(t)} q(x) d\xi = \int_0^{l(t)} (1 + \cos(x)) d\xi = (x + \sin(x)) \Big|_0^{l(t)} \\ &= l(t) + \sin(l(t)) \end{aligned}$$

4. Eine homogene Scheibe (Dichte ρ , Dicke h , Radius $2R$) wurde im Abstand R von ihrem Mittelpunkt A mit zwei symmetrisch angeordneten Löchern (Radius $R/2$) versehen. Sie rollt im Schwerfeld der Erde schlupffrei in der xy -Ebene und ist im Punkt D in y -Richtung elastisch über ein Federelement mit der Steifigkeit c verbunden. Das Federelement wird in x -Richtung reibungsfrei über eine Lagerung geführt und ist in der Position $\phi = 0$ entspannt. Die Scheibenachse ist durch einen linearen Dämpfer (Dämpfungskoeffizient d) mit einer starren Wand verbunden. Im Mittelpunkt der Scheibe greift eine Kraft $f(t)$ in x -Richtung an. 6 P.

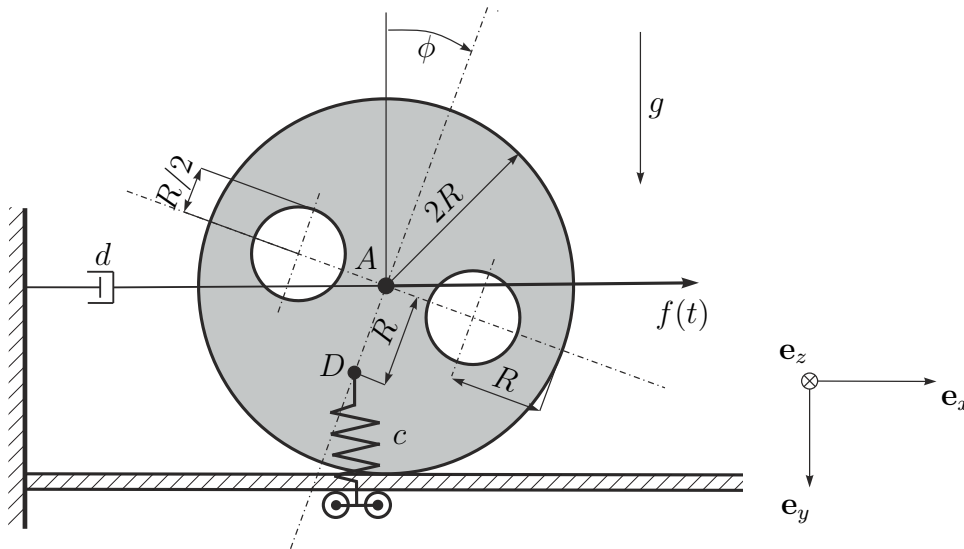


Abbildung 5: Bewegte Scheibe

- a) Berechnen Sie die Masse m der Scheibe. 0.5 P.
- b) Wie lautet die kinematische Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ der Scheibe und der Geschwindigkeit v_A im Punkt A in x -Richtung? 0.5 P.
- c) Ermitteln Sie die kinetische Energie der Scheibe $T(\dot{\phi})$? 1 P.
Hinweis: Sie können das Massenträgheitsmoment der Kreisscheibe vorerst mit $\Theta_{zz} = \frac{17mR^2}{8}$ als bekannt annehmen.
- d) Wie lautet die potentielle Energie des Systems $V(\phi)$? 1 P.
- e) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion an und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Lagrange Formalismus. Führen Sie dazu eine allgemeine generalisierte Kraft f_q ein. 2 P.
- f) Geben Sie die generalisierte Kraft f_q an. Berücksichtigen Sie dabei sowohl die Kraft $f(t)$ als auch die Dämpferkraft f_d . 1 P.

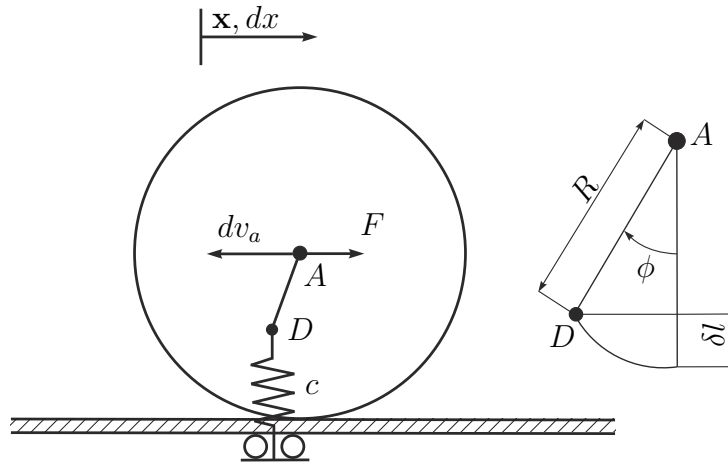


Abbildung 6

a)

$$m = \rho(2R)^2 \pi h - 2\rho(R/2)^2 \pi h = 7\pi\rho R^2 h/2$$

b)

$$v_A = 2R\dot{\phi}$$

c)

$$T = m \frac{v_A^2}{2} + \Theta_{zz} \frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{49}{16} m R^2 \dot{\phi}^2$$

d)

$$V = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{kR^2(1 - \cos(\phi))^2}{2}$$

e)

$$L = T - V = \frac{49}{16} m R^2 \dot{\phi}^2 - \frac{kR^2(1 - \cos(\phi))^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \right) = f_\phi$$