

Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 07.03.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	9	6	7	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In Abb. 1 ist ein handelsüblicher Kugelgriller dargestellt. Dabei wird das kugelförmige Grillgut mit Durchmesser d_1 , Emissivität ε_1 und Masse m_1 innerhalb des kugelförmigen Grillers (Durchmesser d_2 und Emissivität ε_2) erhitzt. Der Einfluss des Grillrosts kann für die Berechnungen vernachlässigt werden. 10 P.

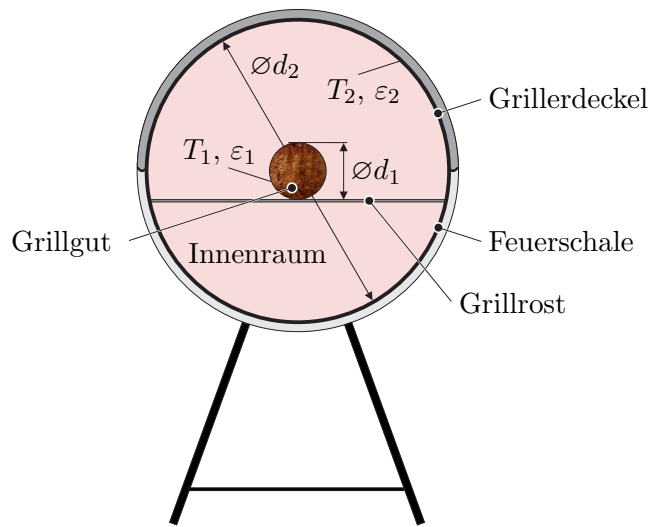


Abbildung 1: Kugelgriller mit Grillgut.

- a) Leiten Sie die Sichtfaktoren für den Innenraum des Grillers, d.h. für dessen Schale und das Grillgut her. Dabei können der Grillerdeckel und die Feuerschale als eine homogene Schale betrachtet werden. 3 P.
Hinweis: Berücksichtigen Sie dabei geschickt die Eigenschaften der Sichtfaktoren im hier betrachteten radialsymmetrischen Fall.
- b) Berechnen Sie die aus dem Grillgut austretende Nettowärmestromdichte. Durch die spezielle Beschichtung der Innenwand des Grillers gilt $\varepsilon_2 = 1$ und vernachlässigen Sie weiters die Konvektion. 2 P.
Hinweis: Die Nettowärmestromdichten können mit der Formel $\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}\{\varepsilon\} (\mathbf{E} - \mathbf{F} (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}))^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \sigma \mathbf{T}^4$ berechnet werden.
- c) Geben Sie die Energieerhaltung für das Grillgut an. Leiten Sie die Differentialgleichung der Grillguttemperatur T_1 mithilfe der kalorischen Zustandsgleichung $de_i = c_p dT_1$, wobei e_i die spezifische innere Energie und c_p die spezifische Wärmekapazität bezeichnet, her. 1 P.
- d) Betrachten Sie die in Abb. 2 dargestellte, kugelförmige Schale des Grillers. 4 P.
Diese besteht aus zwei unterschiedlichen Werkstoffen mit den Wärmeleitfähigkeiten λ_1 und λ_2 . Ermitteln Sie den stationären Temperaturverlauf $T(r)$ für einen konstanten Wärmestrom \dot{Q}_0 in radialer Richtung für $T(r_2) = T_2$.
Hinweis: Unter der Annahme radialsymmetrischer Verhältnisse folgt die Wärmeleitgleichung zu $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right)$.

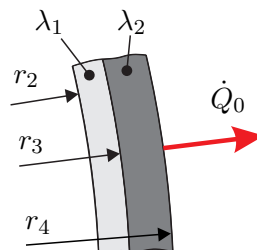


Abbildung 2: Schale des Grillers.

Lösung:

a) Das Grillgut besitzt eine konvexe Oberfläche, daher ergibt sich $F_{11} = 0$. Weiters folgt aus $F_{11} + F_{12} = 1$ sofort $F_{12} = 1$. Die letzten beiden Sichtfaktoren folgen aus der Reziprozität und der verbleibenden Summenregel zu $F_{21} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$ und $F_{22} = 1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$.

b) Durch anfängliches Einsetzen von $\varepsilon_2 = 1$ vereinfacht sich die Berechnung erheblich. Die Nettowärmestromdichten ergeben sich zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\varepsilon_1(T_1^4 - T_2^4) \\ -\sigma\varepsilon_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2(T_1^4 - T_2^4) \end{bmatrix}.$$

c) Die zeitliche Änderung der extensiven inneren Energie folgt aus der kalorischen Zustandsgleichung zu

$$\dot{E}_i = c_p m_1 \frac{dT_1}{dt} = -\dot{q}_1 A_1 = -\dot{q}_1 d_1^2 \pi$$

und durch Umformen und Einsetzen des vorherigen Ergebnisses erhält man

$$\frac{dT_1}{dt} = -\frac{d_1^2 \pi}{c_p m_1} \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4).$$

d) Aus der stationären Wärmeleitgleichung lässt sich

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \rightarrow r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = c_1$$

ableiten und mittels der Methode der Trennung der Variablen folgt

$$\frac{c_1}{r^2} dr = dT \text{ und somit } T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2.$$

Aus der Bedingung $\dot{q}_0 = \frac{\dot{Q}_0}{4\pi r^2} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda \frac{c_1}{r^2}$ und durch Einsetzen der Randbedingung $T(r_2) = T_2$ ergibt sich

$$T(r) = T_2 + \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ für } r_2 \leq r \leq r_3$$

und

$$T(r) = T(r_3) + \frac{\dot{Q}_0}{4\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) \text{ für } r_3 < r \leq r_4.$$

2. In Abb. 3 ist ein drehbar gelagerter Balken (Trägheitsmoment $\theta_{B,zz}^{(A)}$ um den Drehpunkt A, Länge l , Masse vernachlässigbar) abgebildet auf den das Moment τ wirkt. Im betrachteten ebenen Beispiel gleitet ein Würfel mit der Kantenlänge $2k$, dem Massenträgheitsmoment $\theta_{W,zz}^{(S)}$ um den Schwerpunkt S des Würfels und der Masse m reibungsfrei auf diesem Balken. Weiters greift eine parallel zum Balken wirkende Störkraft F_d am Schwerpunkt des Würfels an. Am rechten Ende des Balkens ist eine lineare Feder mit der Federkonstante c und der Nulllänge x_0 angebracht. 9 P.

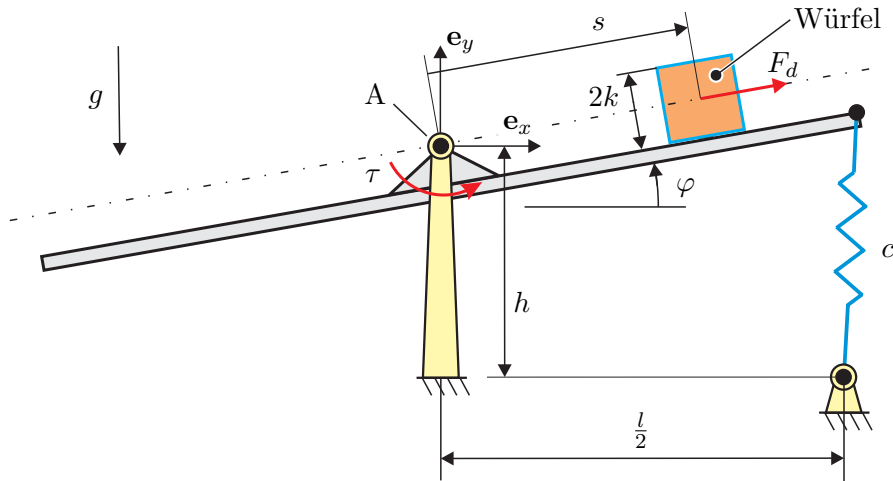


Abbildung 3: Drehbar gelagerter Balken mit gleitendem Würfel.

- a) Leiten Sie die Winkelgeschwindigkeit und die translatorische Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Würfels in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [\varphi \ s]^T$ und deren zeitlicher Ableitungen her. 2 P.
- b) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und deren zeitlicher Ableitungen. 1 P.
- c) Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems. Nehmen Sie dazu an, dass die potentielle Energie für $\varphi = 0$ verschwindet. 2 P.
- d) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion an. 1 P.
- e) Leiten Sie mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen des Systems her. 3 P.

Lösung:

- a) Der Ortsvektor vom Koordinatenursprung zum Schwerpunkt des Würfels \mathbf{x}_W folgt zu

$$\mathbf{x}_W = \begin{bmatrix} s \cos(\varphi) \\ s \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

und somit die translatorische Geschwindigkeit \mathbf{v}_W zu

$$\mathbf{v}_W = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_W = \begin{bmatrix} \dot{s} \cos(\varphi) - s \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{s} \sin(\varphi) + s \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

bzw. ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit des Würfels $\omega_W = \dot{\varphi}$.

- b) Die kinetische Energie ergibt sich unter Vernachlässigung der Masse des Balkens zu

$$T = \frac{1}{2} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)}) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_W^T \mathbf{v}_W = \frac{1}{2} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)}) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2).$$

- c) Für die potentielle Energie der Feder V_F ist die Länge der Feder zu bestimmen. Dazu wird der Ortsvektor \mathbf{x}_F vom unteren zum oberen Aufhängungspunkt der Feder benötigt. Dieser resultiert zu

$$\mathbf{x}_F = \begin{bmatrix} k \sin(\varphi) + \frac{l}{2} \cos(\varphi) - \frac{l}{2} \\ h - k \cos(\varphi) + \frac{l}{2} \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

und somit folgt die potentielle Energie der Feder zu

$$V_F = \frac{1}{2} c (|\mathbf{x}_F| - x_0)^2$$

mit $|\mathbf{x}_F| = \sqrt{\mathbf{x}_F^T \mathbf{x}_F}$. Die potentielle Energie V_G zufolge der Gravitation berechnet sich zu $V_G = mgs \sin(\varphi)$ und weiters die gesamte potentielle Energie zu

$$V = V_G + V_F - V_F(\varphi = 0).$$

- d) Die Lagrangefunktion L ergibt sich zu

$$L = T - V = \frac{1}{2} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)}) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2) - mgs \sin(\varphi) - \frac{1}{2} c (|\mathbf{x}_F| - x_0)^2 + \frac{1}{2} c (h - k - x_0)^2.$$

- e) Euler-Lagrange-Formalismus:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}$$

Die einzelnen Ableitungen folgen zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T = \begin{bmatrix} (\theta_{B,zz}^{(A)} + \theta_{W,zz}^{(S)} + ms^2) \ddot{\varphi} + 2ms\dot{s}\dot{\varphi} \\ m\ddot{s} \end{bmatrix}$$

und

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \begin{bmatrix} -mgs \cos(\varphi) - c(|\mathbf{x}_F| - x_0) \frac{1}{|\mathbf{x}_F|} \mathbf{x}_F^T \left[k \cos(\varphi) - \frac{l}{2} \sin(\varphi) \quad k \sin(\varphi) + \frac{l}{2} \cos(\varphi) \right]^T \\ ms\dot{\varphi}^2 - mg \sin(\varphi) \end{bmatrix}^T.$$

Der Vektor der generalisierten Koordinaten \mathbf{Q} folgt zu

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tau \\ F_d \end{bmatrix}.$$

3. In diesem Beispiel wird die hydraulische Presse aus Abb. 4 betrachtet. Diese besteht aus einer Ölkammer mit dem Ausgangsvolumen V_0 (für $s_1 = 0$ und $s_2 = 0$) und zwei beweglichen Kolben mit den Massen m_1 und m_2 , den Querschnittsflächen $A_1 > A_2$ und den Auslenkungen s_1 und s_2 . Auf die Kolben wirken die externen Kräfte F_1 und F_2 . 6 P.

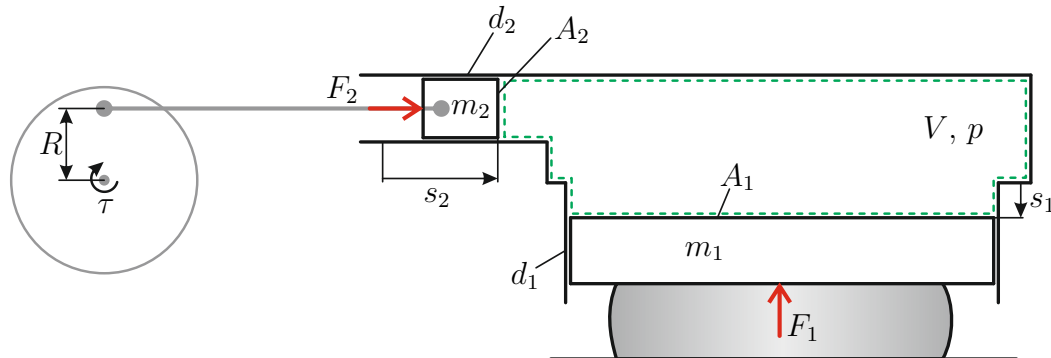


Abbildung 4: Hydraulische Presse.

Es gelten die Annahmen:

- Die Druck- und Temperaturverteilung in der Ölkammer ist homogen. Die Ölkammertemperatur T ist konstant.
 - Es treten keine Leckagen in den Kolbendichtungen auf. Allerdings tritt aufgrund von Reibung eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung mit den positiven Dämpfungskoeffizienten d_1 bzw. d_2 auf.
 - Die vergleichsweise geringe Gewichtskraft der Kolben wird in Anbetracht der hohen Prozesskräfte vernachlässigt. Weiters wird der Umgebungsdruck näherungsweise mit Null angenommen.
- a) Die Konstitutivgleichung für das Öl lautet $\rho(p) = \rho_0 \exp\left(\frac{p-p_0}{\beta}\right)$ mit der Dichte ρ und dem Druck p des Öls, wobei β den konstanten Kompressionsmodul des Öls und ρ_0 die Dichte des Öls beim Normdruck p_0 bezeichnet. Geben Sie die Massenerhaltung für die Ölkammer an und leiten Sie mithilfe der Konstitutivgleichung die Differentialgleichung für den Öldruck p her. 2 P.
- b) Der Kolben 1 drückt von oben auf das zu pressende, ebene Werkstück. Dieses reagiert mit einer zur Dickenänderung proportionalen Rückstellkraft in der Form $F_1 = F_R = cs_1$ mit dem positiven Steifigkeitskoeffizienten c . Geben Sie die Impulserhaltung für die beiden Kolben an. 2 P.
Hinweis: Am Kolben 2 wirkt weiterhin die allgemeine Kraft F_2 .
- c) Das System kann für die Zustandsraumdarstellung in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}u$ mit dem Zustand $\mathbf{x} = [s_1 \ v_1 \ s_2 \ v_2 \ p]^T$ und dem Eingang $u = F_2$ angegeben werden. Dabei bezeichnen v_1 und v_2 die jeweiligen Kolbengeschwindigkeiten. Geben Sie die vektorwertige Funktion $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ und den Eingangsvektor \mathbf{b} an. 1 P.
- d) Bestimmen Sie das Kraftübersetzungsverhältnis $\ddot{u} = F_1/F_2$ der hydraulischen Presse im stationären Fall. Die Kraft F_2 wird nun mithilfe einer elektromechanischen Vorrichtung eingepreßt. Ein Elektromotor verdreht eine Scheibe, an der im Abstand R vom Drehpunkt eine masselose Stange drehbar anbracht ist, siehe Abb. 4. Es werden nur kleine Auslenkungen der Scheibe betrachtet. Der Motor besitzt das maximale Drehmoment τ_{max} . Bestimmen Sie die maximal mögliche stationäre Dickenänderung $s_{1,max}$ des Werkstücks. 1 P.

Lösung:

a) Das Volumen der Ölkammer kann mit

$$V = V_0 + s_1 A_1 - s_2 A_2$$

angegeben werden. Aus der Massenerhaltung

$$\dot{m} = \frac{d}{dt}(\rho V) = \dot{\rho} V + \rho \dot{V} = 0$$

folgt

$$\dot{\rho} = -\frac{\rho \dot{V}}{V}$$

und aus der Konstitutivgleichung des Öls folgt

$$\dot{\rho} = \underbrace{\rho_0 \exp\left(\frac{p - p_0}{\beta}\right)}_{\rho} \frac{1}{\beta} \dot{p}.$$

Gleichsetzen und Umformen liefert die Differenzialgleichung

$$\dot{p} = -\beta \frac{\dot{V}}{V} = \beta \frac{A_2 \dot{s}_2 - A_1 \dot{s}_1}{V_0 + s_1 A_1 - s_2 A_2}$$

für den Öldruck p .

b) Die Impulserhaltung für beide Kolben lautet

$$m_1 \ddot{s}_1 = p A_1 - F_1 - d_1 \dot{s}_1 = p A_1 - c s_1 - d_1 \dot{s}_1$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -p A_2 + F_2 - d_2 \dot{s}_2.$$

c) Die vorhergehenden Differenzialgleichungen lassen sich als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \frac{1}{m_1} (p A_1 - c s_1 - d_1 v_1) \\ v_2 \\ \frac{1}{m_2} (-p A_2 - d_2 v_2) \\ \beta \frac{A_2 v_2 - A_1 v_1}{V_0 + s_1 A_1 - s_2 A_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u$$

zusammenfassen.

d) Im stationären Fall gilt

$$p_{stat} = \frac{F_{1,stat}}{A_1} = \frac{F_{2,stat}}{A_2}$$

und damit für das Kraftübersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Der Motor übt die Kraft $F_2 = \frac{\tau}{R}$ aus. Die maximal mögliche stationäre Dickenänderung folgt zu

$$s_{1,max} = \frac{\tau_{max}}{R} \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{c}.$$

4. Im folgenden Beispiel wird die Wasserversorgung eines Hochhauses betrachtet. Auf dem Dach befindet sich ein Wassertank mit der Querschnittsfläche A_T . Das Wasser (Dichte ρ) wird durch ein Rohr mit konstanter Querschnittsfläche A_R zu den Ausläufen transportiert. Diese können mittels eines Absperrhahns entweder ganz geöffnet oder ganz verschlossen werden und sind mittels eines Flansches mit dem Rohr verbunden. Die Ausläufe wirken als scharfkantige Drossel mit dem Drosselquerschnitt A_D und spritzen das Wasser in die Umgebung ab. Der Wassertank kann mittels einer Versorgungsleitung mit dem Volumenstrom q_{in} aufgefüllt werden. 7 P.

Im Gebäudeinneren sowie im Tank herrscht der Umgebungsdruck p_U . Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z -Richtung. Der Volumenstrom q_D durch eine Drossel kann mittels

$$q_D = \alpha A_D \sqrt{\frac{2}{\rho} \sqrt{p_{D1} - p_{D2}}},$$

mit dem Kontraktionskoeffizienten α sowie dem Druck p_{D1} vor der Drossel und p_{D2} nach der Drossel, bestimmt werden.

Annahmen:

- Die auftretenden Strömungen werden als stationär, inkompressibel und reibungsfrei (nicht-viskos) angenommen, d. h. die Dichte ρ und die Geschwindigkeit \mathbf{v} sind nicht von der Zeit abhängig.
- Die Umlenkung im Rohr erfolgt verlustfrei.

Gegeben: $A_T, A_R, A_D, \alpha, H, \rho, g, p_U$

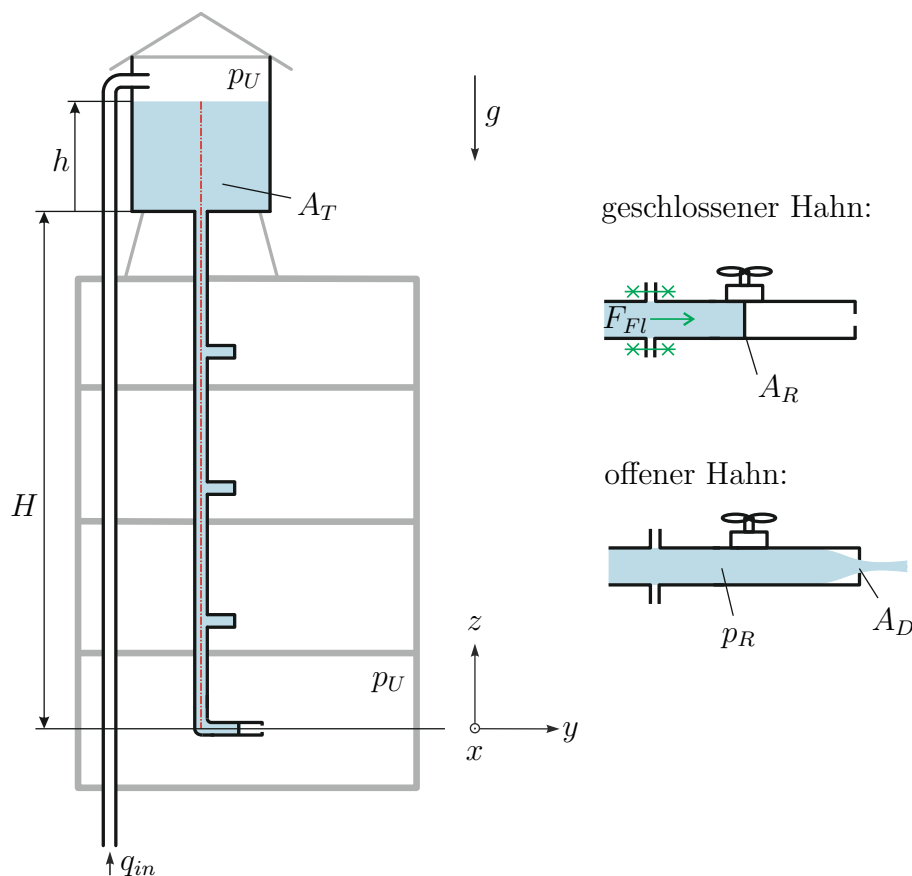


Abbildung 5: Wassertank auf einem Hochhaus.

Für die Unterpunkte 4a und 4b gilt, dass alle Absperrhähne *geschlossen* sind, kein Zulauf erfolgt ($q_{in} = 0$) und der Füllstand h bekannt ist:

- a) Bestimmen Sie den Druckverlauf $p(z)$ im Inneren des Rohres bzw. Tanks (entlang der rot strichpunktierten Linie) für $0 < z < H + h$. Stellen Sie dazu die Bernoulli-Gleichung entlang einer geeignet gewählten Strömungslinie auf. Skizzieren Sie den Verlauf von $p(z)$ und beschriften Sie markante Punkte. 2 P. |
- b) Bestimmen Sie die Haltekraft F_{Fl} , welche von der Flanschverbindung des untersten Auslaufs aufzubringen ist. 1 P. |
Hinweis: Vernachlässigen Sie das Gewicht des Auslaufs und des Wassers darin.

Für die Unterpunkte 4c bis 4d gilt, dass nur der unterste Absperrhahn *offen* ist. Weiters erfolgt nun ein Wasserzulauf mit dem konstanten Volumenstrom q_{in} :

- c) Nehmen Sie an, der aus der Drossel austretende Volumenstrom beträgt $q_{out}(t)$. Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit $v_D(t)$ an der Drossel, die Fließgeschwindigkeit $v_R(t)$ im Rohr, sowie eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Füllstandshöhe $h(t)$. 1 P. |
- d) Bestimmen Sie die sich einstellende, stationäre Füllstandshöhe $h_S(q_{in})$ als Funktion des konstanten Zulaufvolumenstroms q_{in} . Berechnen Sie als Zwischengröße den Druck p_R vor der Drossel. 3 P. |
Hinweis: Es kann angenommen werden, dass $A_T \gg A_R > A_D$ gilt und dass der Zulaufstrom ausreichend groß ist, damit immer $h > 0$ gilt.

Lösung:

- a) Das Wasser ruht, alle Fließgeschwindigkeiten sind Null. Die Bernoulli-Gleichung für eine Strömungslinie von der Wasseroberfläche bis zur Höhe z lautet

$$\frac{0^2}{2} + \frac{p_U}{\rho} + g(H + h) = \frac{0^2}{2} + \frac{p(z)}{\rho} + gz$$

und damit folgt der Druckverlauf zu

$$p(z) = p_U + \rho g(H + h - z).$$

- b) Vor dem Absperrhahn herrscht im Rohr der Druck $p(0)$. Außerhalb gilt der Umgebungsdruck p_U . Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$p(0)A_R - p_U A_R + F_{Fl} = 0$$

und liefert die Haltekraft $F_{Fl} = -\rho g(H + h)A_R$.

- c) Aus der Massenerhaltung folgt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{A_T} (q_{in} - q_{out}(t))$$

für die Füllstandshöhe h sowie die Fließgeschwindigkeit

$$v_R(t) = \frac{q_{out}(t)}{A_R}$$

im Rohr und die Ausflussgeschwindigkeit

$$v_D(t) = \frac{q_{out}(t)}{A_D}$$

der Drossel.

- d) Im stationären Fall sind der Zufluss- und der Ausfluss-Volumenstrom gleich, $q_{out} = q_{in}$. Nach der Drossel herrscht der Umgebungsdruck p_U . Der Druck p_R vor der Drossel errechnet sich mit der Durchflussgleichung der Drossel zu

$$p_R = \left(\frac{q_{in}}{\alpha A_D} \right)^2 \frac{\rho}{2} + p_U.$$

Die Bernoulli-Gleichung für eine Strömungslinie von der Wasseroberfläche bis vor die Drossel lautet

$$\underbrace{\frac{v_T^2}{2}}_{\approx 0} + \frac{p_U}{\rho} + g(H + h_S) = \frac{v_R^2}{2} + \frac{p_R}{\rho} + 0.$$

Einsetzen des Drucks p_R und der Fließgeschwindigkeit $v_R = q_{in}/A_R$ liefert die stationäre Füllstandshöhe

$$h_S = \frac{q_{in}^2}{2g} \left(\frac{1}{A_R^2} + \frac{1}{\alpha^2 A_D^2} \right) - H.$$