Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 27.06.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	10	5	8	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In einer um die z-Achse drehbar gelagerten parabelförmigen Schale befinde sich eine Kugel (Masse m_K). Diese Schalenform wird durch ($p > 0$) 9 P.|

$$z = p(x^2 + y^2) \qquad \text{für } \; 0 \le z \le H \; \text{ an der Innenwand,}$$
$$z = p(x^2 + y^2 - d) \qquad \text{für } \; -d \le z \le H \; \text{ an der Außenwand}$$

beschrieben, die Dicke der Schale sei d, die Höhe (in z-Richtung) H und ihre Masse m_S (homogene Dichte). Die Schwerkraft wirkt in negativer z-Richtung. Die Schale kann reibungsfrei um die z-Achse rotieren. Die Kugel sei mit der (masselosen) grün gezeichneten Führungsschiene an einem bestimmten Winkel an der Schale im Bereich $\varepsilon < z < H$, $\varepsilon > 0$, fixiert. Wird nun die Kugel als Punktmasse angenommen, ergeben sich die generalisierten Koordinaten h und φ, wie in Abbildung 1 dargestellt, für dieses System.

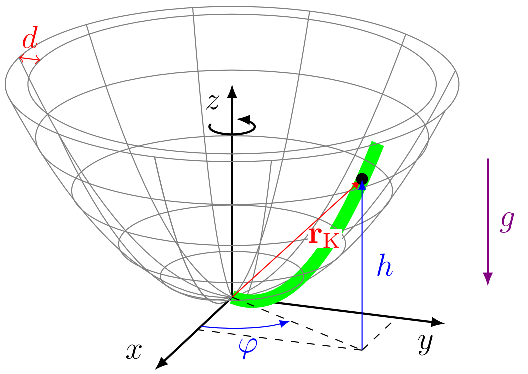

Abbildung 1: Parabolische Schale mit Punktmasse.

a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment θ_{zz} der Schale um die z-Achse. 3.0 P.|
Hinweis: Zylinderkoordinaten $y = r\sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$

b) Stellen Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}_\mathrm{K}$ vom Ursprung des in Abbildung 1 eingezeichneten Koordinatensystems zur Kugel als Funktion der generalisierten Koordinaten h und φ auf und bestimmen sie dessen Geschwindigkeit. 1.5 P.|

c) Berechnen Sie die kinetische, sowie die potentielle Energie der Kugel und der Schale. Geben Sie weiters die Lagrange-Funktion des Systems an. 2.0 P.|

d) Ermitteln Sie mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen die Bewegungsgleichungen und die stationäre Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Kugel für konstante Höhe h. 2.5 P.|

Hinweis: Die Teilaufgabe 1a) ist unabhängig von den Teilaufgaben 1b) - 1d) lösbar. Setzen Sie das Ergebnis aus 1a) **nicht** in die nachfolgenden Teile ein.

Lösung:

a) Radius der Innen- bzw. Außenwand in Abhängigkeit von z

$$r_i = \sqrt{\frac{z}{p}} \qquad\qquad r_a = \sqrt{\frac{z}{p} + d}$$

Masse und Massenträgheitsmoment der Schale in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} m &= \varrho \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{H} r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}z + \varrho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \int_{-d}^{0} r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}z \\ &= \varrho \pi d \left(d + H - \frac{d}{2p} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{zz} &= \varrho \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{H} r^3 \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}z + \varrho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \int_{-d}^{0} r^3 \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}z \\ &= \frac{\varrho \pi d}{2} \left(\frac{H^2}{p} + dH + \frac{d^2}{3p^2} + d^2 - \frac{d^2}{p} \right) \end{aligned}$$

b)

$$r_K = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{h}{p}} \cos\varphi \\ \sqrt{\frac{h}{p}} \sin\varphi \\ h \end{bmatrix} \qquad \dot{r}_K = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{h}{p}} \sin\varphi \\ \sqrt{\frac{h}{p}} \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{hp}} \cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{hp}} \sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} \dot{h}$$

c)

$$T_K = \frac{1}{2} m_K \dot{r}_K^T \dot{r}_K = \frac{1}{2} m_K \left(\frac{h}{p} \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{4hp} + 1 \right) \dot{h}^2 \right)$$

$$T_S = \frac{1}{2} \theta_{zz} \dot{\varphi}^2 \qquad V_K = m_K g h \qquad L = T_S + T_K - V_K$$

d)

$$\theta_{zz} \ddot{\varphi} + m_K \frac{h}{p} \ddot{\varphi} + m_K \frac{1}{p} \dot{\varphi} \dot{h} = 0$$

$$\left(\frac{1}{4hp} + 1 \right) \ddot{h} - \frac{1}{8} \frac{1}{ph^2} \dot{h}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{p} \dot{\varphi}^2 + g = 0$$

$$|\dot{\varphi}| = \sqrt{2gp}$$

2. Betrachtet wird die in Abb. 2 dargestellte Pflanzen-Bewässerungsanlage. Das Fluid mit der Dichte ρ wird über mehrere Hauptleitungen mit Innendurchmesser D und den Längen L_i, mit $i \in \{1,2,3\}$ verteilt und über die Nebenleitungen mit Innendurchmesser d und den Längen l_j, $j \in \{1,2\}$ den Pflanzen zugeführt. Die Düsen werden als scharfkantige Drosseln mit dem Querschnitt der vena contracta A_v modelliert. Der den Pflanzen zugeführte Volumenstrom soll q_1 bzw. q_2 betragen. Der Versorgungsdruck p_D der Anlage wird über einen Druckregler eingestellt. Es herrscht Umgebungsdruck p_0 und die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z-Richtung. Die Strömungen werden als stationär, inkompressibel und (zunächst) reibungsfrei betrachtet. Die Umlenkungen in den Leitungen bzw. an den T-Stücken werden verlustfrei angenommen. 10 P.|

Gegeben: L_1, L_2, L_3, D, l_1, d, h_1, h_2 α, q_1, q_2, A_v, p_0, g, ρ, η
Unbekannt: p_D, l_2

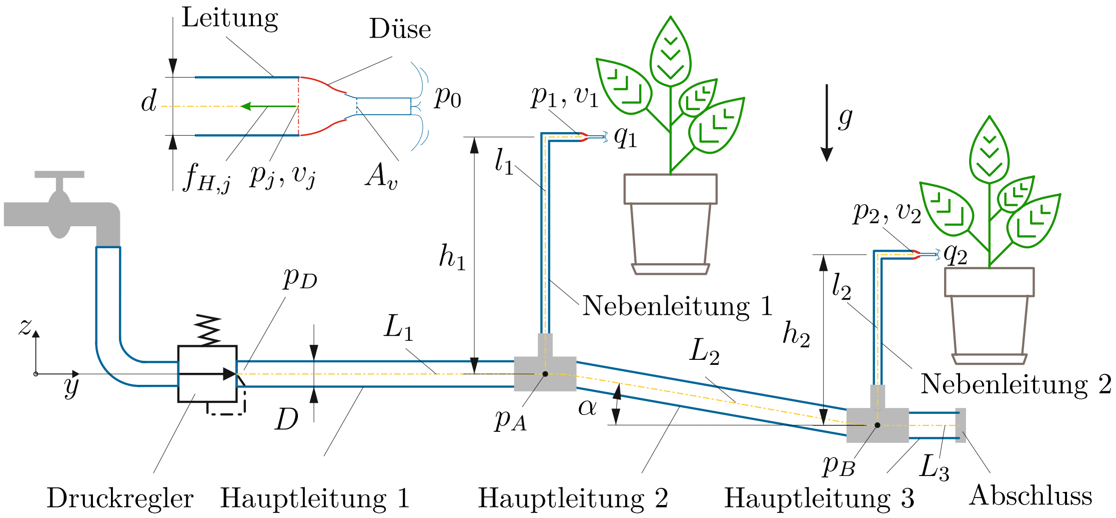

Abbildung 2: Bewässerungsanlage.

a) Bestimmen Sie die Drücke p_j und Eintrittsgeschwindigkeiten v_j des Fluids an der Düse für die vorgegebenen Volumenströme q_j, $j \in \{1,2\}$. 1.0 P.|

Im Folgenden sollen die Druckverluste in den Leitungen über die empirische Darcy-Weisbach Beziehung

$$\Delta p_v = \rho \frac{v^2}{2} \lambda \frac{l}{d}$$

mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v, der Rohrlänge l, dem Rohrdurchmesser d und der Rohrreibungszahl $\lambda = 64/\mathrm{Re}$ berücksichtigt werden. Für laminare Strömung ist die Reynolds-Zahl durch $\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}$ mit der dynamischen Viskosität des Fluids η gegeben.

b) Berechnen Sie die Druckverluste Δp_v aufgrund von Rohrreibung in den einzelnen Leitungsstücken (Hauptleitung 1,2,3, Nebenleitung 1,2). 2.0 P.|
Hinweis: Berechnen Sie zuerst allgemein einen vereinfachten Ausdruck für Δp_v.

c) Ermitteln Sie den einzustellenden Versorgungsdruck p_D sowie die Leitungslänge l_2, damit die vorgegebenen Volumenströme q_j, $j \in \{1,2\}$ eingehalten werden können. Berücksichtigen Sie die Rohrreibungsverluste indem Sie die Bernoulli-Gleichung an entsprechender Stelle um die Druckverlustterme Δp_v erweitern. 4.0 P.|

d) Maximaler Druck in der Bewässerungsanlage

i. Nehmen Sie zunächst an, dass alle Düsen geschlossen sind, dh. $q_1 = q_2 = 0$. Der Druck am Druckregler sei p_D. An welcher Stelle der in Abb. 2 skizzierten Bewässerungsanlage tritt der maximale Druck auf, und wie groß ist dieser ? 1.0 P.|

ii. Ändern sich die Verhältnisse wenn $q_1 = 0, q_2 \neq 0$? Wenn ja, wo tritt der maximale Druck auf, wie groß ist dieser bzw. welche Fallunterscheidung muss getroffen werden? 2.0 P.|

Hinweis: Bereits ermittelte und angeschriebene Zwischenergebnisse müssen nicht zwingend in Folgeausdrücke eingesetzt werden.

Lösung:

a) *Geschwindigkeiten aus Massenerhaltung:*

$$v_j = \frac{q_j}{A_d}, \qquad v_{v,j} = \frac{q_j}{A_v}, \qquad \textit{mit} \qquad A_d = \frac{d^2\pi}{4} \quad \textit{und} \quad j \in \{1,2\}.$$

Drücke aus stationärer Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_{v,1}^2 - v_1^2\right) \qquad\qquad p_2 = p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_{v,2}^2 - v_2^2\right)$$

b) *Druckverluste in den Rohrleitungen:*

$$\Delta p_v = \frac{32 v l \eta}{d^2}$$

bzw.

$$\Delta p_{v,H1} = \frac{32 v_{H1} L_1 \eta}{D^2} \qquad \Delta p_{v,H2} = \frac{32 v_{H2} L_2 \eta}{D^2} \qquad \Delta p_{v,H3} = \frac{32 v_{H3} L_3 \eta}{D^2}$$
$$\Delta p_{v,N1} = \frac{32 v_1 l_1 \eta}{d^2} \qquad \Delta p_{v,N2} = \frac{32 v_2 l_2 \eta}{d^2}$$

mit

$$v_{H1} = \frac{4(q_1+q_2)}{D^2\pi} \qquad v_{H2} = \frac{4q_2}{D^2\pi} \qquad v_{H3} = 0 \qquad v_1 = \frac{4q_1}{d^2\pi} \qquad v_2 = \frac{4q_2}{d^2\pi}$$

c) *Aus stationärer Bernoulli-Gleichung zwischen Druckregler und Düse 1 folgt*

$$p_D = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_{H1}^2\right) + \rho h_1 g + \Delta p_{v,H1} + \Delta p_{v,N1}$$

bzw. zwischen Druckregler und Düse 2

$$l_2 = \frac{d^2}{32 v_2 \eta}\left(p_D - p_2 + \frac{\rho}{2}\left(v_{H1}^2 - v_2^2\right) - \rho\left(h_2 - L_2 \sin\alpha\right) g - \Delta p_{v,H1} - \Delta p_{v,H2}\right)$$

d) i. *Maximaler Druck in Hauptleitung 3/Abschluss*

$$p_B = p_{H3} = p_D + \rho g L_2 \sin\alpha$$

ii. *Maximaler Druck herrscht entweder in Hauptleitung 3/Abschluss oder am Druckregler. Aus der entsprechenden stationären Bernoulli-Gleichung folgt*

$$p_D - p_B = \underbrace{\Delta p_{v,H1} + \Delta p_{v,H2} - \rho g L_2 \sin\alpha - \frac{\rho}{2} v_{H1}^2}_{\chi}$$

und damit die Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} p_D > p_B \quad &\text{für} \quad \chi > 0 \\ p_D < p_B \quad &\text{für} \quad \chi < 0 \\ p_D = p_B \quad &\text{für} \quad \chi = 0 \end{aligned}$$

3. Die Sonne kann als eine strahlende Kugel mit dem Radius r_S und den Strahlungseigenschaften eines schwarzen Körpers betrachtet werden. Der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt l_{SE}. Als Solarkonstante E_0 bezeichnet man die Strahlungsleistung pro m^2 auf eine Fläche am äußersten Rand der Erdatmosphäre mit senkrecht einfallender Strahlung. 5 P.

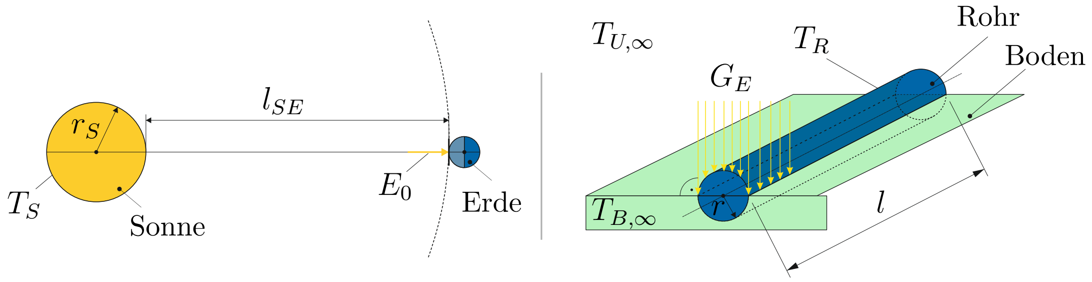

Abbildung 3: Sonnenabstrahlung und Erwärmung eines Rohres.

a) Berechnen Sie die totale Ausstrahlung J_S sowie die Oberflächentemperatur T_S der Sonne als Funktion der Solarkonstanten E_0. 2.0 P.

Die von der Sonne auf die Erde senkrecht eintretende Einstrahlung G_E erwärmt ein mit ruhendem Fluid gefülltes, dünnwandiges Rohr (Radius r, Länge l, Temperatur T_R). Das Rohr gibt seine Wärme in Form von Strahlung (Emissivität ϵ_R) und Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient α_U) an die Umgebung mit der Umgebungstemperatur $T_{U,\infty}$ ab. Zudem wird dem Rohr durch Wärmeleitung über den Boden (Bodentemperatur $T_{B,\infty}$, Wärmeübergangskoeffizient α_B) Wärme entzogen.

b) Geben Sie die Bestimmungsgleichungen für die Wärmestromdichten der einzelnen Wärmeübertragungsarten an. 1.5 P.

c) Ermitteln Sie eine Bestimmungsgleichung für die Oberflächentemperatur des Rohres T_R (=Temperatur des Fluids) für den stationären Fall. Bilanzieren Sie dazu über alle Wärmeströme $\dot{Q}$ im System. 1.5 P.
Hinweis: Aufgrund von $l \gg r$ können die Wärmeströme an den Stirnflächen des Rohres vernachlässigt werden. Die Bestimmungsgleichung muss nicht explizit nach der Rohrtemperatur T_R aufgelöst werden.

Lösung:

a) *Totale Ausstrahlung und Oberflächentemperatur:*

$$J_S = E_0 \frac{4\pi \left(r_S + l_{SE}\right)^2}{4\pi r_S^2} \qquad\qquad T_S = \left(\frac{E_0 \left(r_S + l_{SE}\right)^2}{\sigma r_S^2}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)}$$

b) *Wärmestromdichten:*

$$\begin{aligned} &\text{Austrahlung :} && \dot{q}_{\text{Austr}} = \epsilon_R \sigma T_R^4 \\ &\text{Konvektion :} && \dot{q}_{\text{Konv}} = \alpha_U \left(T_R - T_{U,\infty}\right) \\ &\text{Leitung :} && \dot{q}_{\text{Leit}} = \alpha_B \left(T_R - T_{B,\infty}\right) \end{aligned}$$

c) *Aus*

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{Einstr}} &= \alpha_A \int G_E \sin\varphi \mathrm{d}A = \epsilon_R 2rlG_E \\ \dot{Q}_{\text{Austr}} &= \dot{q}_{\text{Austr}} r\pi l \\ \dot{Q}_{\text{Konv}} &= \dot{q}_{\text{Konv}} r\pi l \\ \dot{Q}_{\text{Leit}} &= \dot{q}_{\text{Leit}} r\pi l \end{aligned}$$

und

$$\dot{Q} = 0 = \dot{Q}_{\text{Einstr}} - \dot{Q}_{\text{Austr}} - \dot{Q}_{\text{Konv}} - \dot{Q}_{\text{Leit}}$$

folgt die Bestimmungsgleichung für die Rohrtemperatur T_R *zu*

$$0 = 2\epsilon_R G_E - \pi \Big(\epsilon_R \sigma T_R^4 + \alpha_U \left(T_R - T_{U,\infty}\right) + \alpha_B \left(T_R - T_{B,\infty}\right)\Big).$$

4. Die Methode der "schwingenden Kugel" erlaubt es den Adiabatenkoeffizienten κ von idealen Gasen zu bestimmen. Die Funktionsweise ist in Abbildung 4 skizziert. Am oberen Ende eines mit Gas gefüllten Gefäßes ist ein Präzisionsrohr mit exakt konstantem Innendurchmesser d angebracht. In dem Glasrohr befindet sich eine Metallkugel mit demselben Durchmesser, die auf dem Gaspolster des Gases mit dem Volumen V und dem Druck p sitzt und dieses Gas nach außen dicht abschließt, auch wenn sich die Kugel in dem Glasrohr bewegt. Nach oben ist das Glasrohr offen und mit der Luftatmosphäre vom Druck p_a verbunden. 8 P.|

   Lässt man die Kugel der Masse m_K in das Präzisionsrohr fallen, so schwingt sie auf dem Luftpolster periodisch mit der Periodendauer τ auf und ab. Da nur wenig Zeit für einen Wärmetausch mit der Umgebung zur Verfügung steht, wird der Prozess als adiabatisch und reversibel (also isentrop) angesehen.

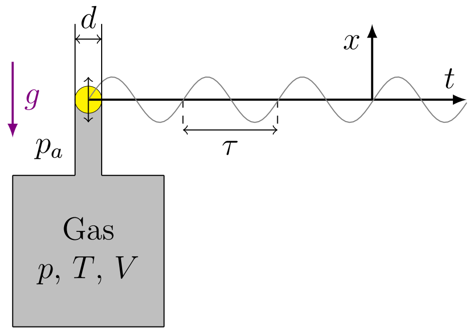

Abbildung 4: Schwingende Kugel der Masse m_K auf einem Gaspolster.

   a) Berechnen Sie den Druck p_0 für die Ruhelage der Kugel $x = x_0 = 0$. 1.0 P.|

   b) Geben Sie den Gasdruck $p(t)$ in Abhängigkeit des Volumens $V(t)$ für eine isentrope Zustandsänderung an. Entwickeln Sie das Ergebnis in eine Reihe um die Ruhelage gegeben durch $V = V_0$ und $p = p_0$ bis zum linearen Glied. Geben Sie weiters eine Funktion für $V(t)$ abhängig von $x(t)$ an. 2.0 P.|

   c) Geben Sie die auf die Kugel wirkenden Kräfte (Reibungskräfte zwischen Kugel und Rohr können vernachlässigt werden) an und bestimmen Sie mithilfe der Impulserhaltung die Bewegungsgleichung. Setzen Sie die lineare Näherung aus Aufgabe 4b) ein. 2.0 P.|

   d) Lösen Sie die Differentialgleichung für $x(0) = x_A$ und geben Sie eine Gleichung für die Kugelposition $x(t)$ an. Geben Sie die Periodendauer τ der Schwingung an und erklären Sie, wie Sie damit den Adiabatenkoeffizienten κ für das Gas bestimmen können. 2.0 P.|
   Hinweis: Lösungsansatz $x(t) = A\cos(\omega t)$.

   e) Geben Sie die Gleichungen für die zeitlichen Verläufe des Gasdrucks $p(t)$ und der Gastemperatur $T(t)$ an. Der Druck und die Temperatur für die Ruhelage $x_0 = 0$ sind p_0 bzw. T_0. 1.0 P.|

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
&m_K g + \int_{\partial\mathcal{V}} p\mathbf{n}\mathcal{A} = m_K g + \int_{\partial\mathcal{V}_1} p_a\mathbf{n}\mathcal{A} + \int_{\partial\mathcal{V}_2} p_0\mathbf{n}\mathcal{A} = 0 \\
&m_K g + \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} p_a \cos\theta r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p_0 \cos\theta r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = m_K g + r^2\pi\left(p_a - p_0\right) \\
&p_0 = p_a + \frac{m_K g}{A} \quad \text{mit } A = r^2\pi = \frac{d^2}{4}\pi
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
p_0 V_0^\kappa &= p(t)V^\kappa(t) \\
p(t) &= p_0\left(\frac{V_0}{V(t)}\right)^\kappa \approx p_0\left(1 - \frac{\kappa}{V_0}\left(V(t) - V_0\right)\right) \\
V(t) &= V_0 + Ax(t)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
m_K\ddot{x} &= -m_K g + (p - p_a)A = -m_K g + \left(p_0\left(1 - \frac{\kappa}{V_0}\left(V - V_0\right)\right) - p_a\right)A \\
&= -m_K g + \left(\frac{m_K g}{A} + p_a - p_0\frac{\kappa}{V_0}\left(Ax + V_0 - V_0\right) - p_a\right)A \\
\ddot{x} &= -\frac{p_0\kappa A^2}{m_K V_0}x
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_A\cos\left(\sqrt{\frac{p_0\kappa A^2}{m_K V_0}}t\right) \\
\kappa &= \frac{64 m_K V_0}{\tau^2 p_0 d^4}
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
p(t) &= p_0\left(\frac{V_0}{V_0 + Ax(t)}\right)^\kappa \\
T(t) &= T_0\left(\frac{V_0}{V_0 + Ax(t)}\right)^{\kappa-1}
\end{aligned}
$$