1.) Typischerweise ist in Kraftfahrzeugen serienmäßig eine elektrische Heckscheibenheizung eingebaut. Die kostengünstigste Variante in der Herstellung ist, die Heizdrähte direkt auf die Innenseite der Scheibe aufzudrucken, siehe Abbildung 1.

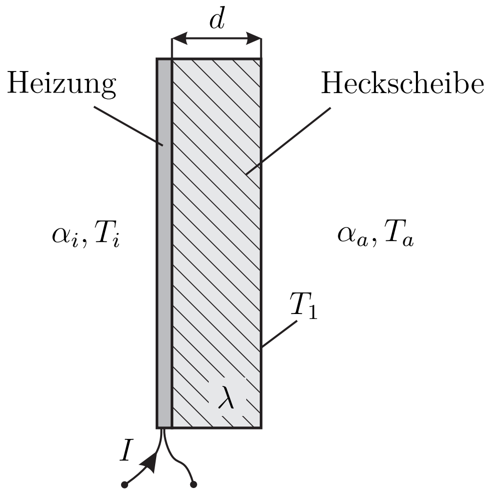

Abbildung 1: Heckscheibe mit Heizung.

In weiterer Folge wird vereinfachend angenommen, dass die Heizdrähte einen gesamten Widerstand R aufweisen und die Wärme gleichmäßig über die Scheibe mit der Fläche A, der Dicke d und der Wärmeleitfähigkeit λ verteilt wird. Wärme wird sowohl mit der Luft im Innenraum (feste Temperatur T_i) als auch der umgebenden Luft (feste Temperatur T_a) ausgetauscht. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt innen α_i und außen α_a.

Stellen Sie die Temperatur T_1 an der Außenseite der Scheibe in Abhängigkeit der eingebrachten elektrischen Leistung dar, d.h. $T_1 = f(I)$.

Lösung:

$$T_1(I) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}} \left(\frac{1}{\alpha_i \alpha_a} \frac{I^2 R}{A} + \frac{1}{\alpha_a} T_i + \left(\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_i} \right) T_a \right) \tag{1}$$

2.) Im folgenden Beispiel soll der Wärmeübergang zwischen einem Körper und Luft untersucht werden, siehe Abbildung 2. Um die Komplexität zu reduzieren, geht man von einer stationären 1-dimensionalen Wärmeleitung aus.

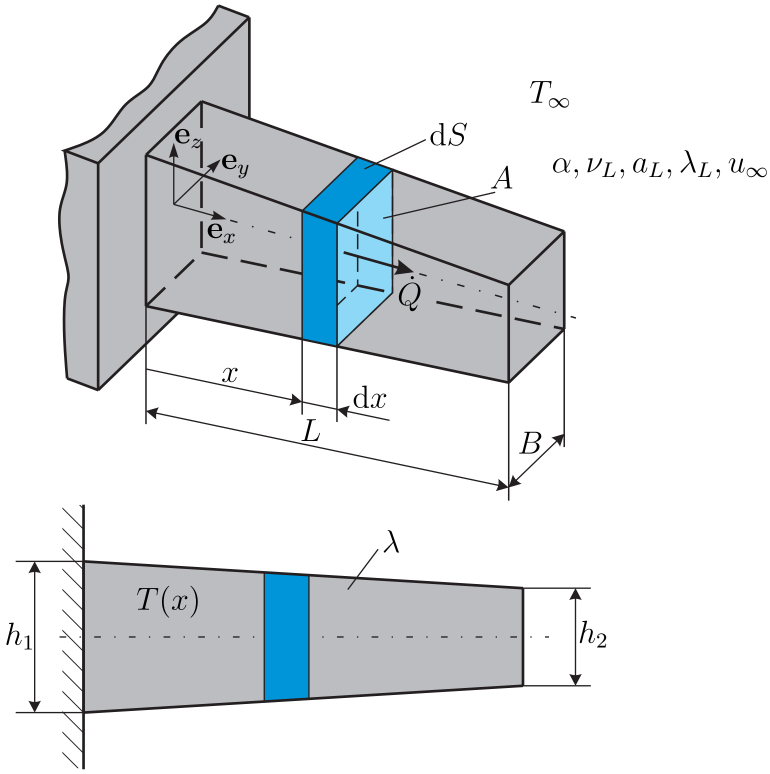

Abbildung 2: Herausstehender Körper.

Der skizzierte Körper mit der Länge L und der Breite B habe am Ort x die lokale Querschnittsfläche $A(x)$, den lokalen Umfang $U(x)$ und zwischen $[0, x]$ kann die Mantelfläche durch eine Funktion $S(x)$ beschrieben werden. Weiters sei angenommen, dass die Wärmeleitfähigkeit λ des Körpers konstant ist. Zwischen der Luft und dem Körper kommt es durch Konvektion zu einem Wärmeaustausch, wobei der Wärmeübergangskoeffizient α und die Temperatur der Luft T_∞ konstant sind. Der Körper besitzt keine Wärmequellen und man geht von einer 1-dimensionalen Wärmeleitung in $\mathbf{e}_x$-Richtung aus.

- Berechnen Sie für die Geometrie des Körpers die lokale Querschnittsfläche $A(x)$, den lokalen Umfang $U(x)$ und die Mantelfäche $S(x)$ im Bereich $[0, x]$.
- Bestimmen Sie mittels des Fourierschen Wärmeleitgesetzes den Wärmestrom $\dot{Q}(x)$ und stellen Sie die Energiebilanz für den infinitesimalen Bereich $[x, x + \mathrm{d}x]$ auf.
- Ermitteln Sie aus der Energiebilanz die Bestimmungsgleichung.
- In der folgenden Aufgabe soll anstatt eines konvektiven Wärmeübergangs, der Körper isoliert betrachtet werden. Wie lautet für diesen Fall die Bestimmungsgleichung?
- Um die Bestimmungsgleichung zu lösen, sei angenommen, dass die Querschnittsfläche $A = hb$ ($h = h_1 = h_2$) konstant ist. Basierend auf dieser Vereinfachung soll

nun die Bestimmungsgleichung und eine Lösung des Randwertproblems berechnet werden. Dabei gelten die folgenden zwei Randbedingungen

$$T(0) = T_0 \quad \text{und} \tag{2}$$

$$\alpha(T(L) - T_\infty) = -\lambda \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} . \tag{3}$$

- Wie lautet der Wärmestrom an der Stelle $x = 0$.

Lösung:

- *Lokale Querschnittsfläche, Umfang und Mantelfäche*

$$A(x) = B\left(h_1 + (h_2 - h_1)\frac{x}{L}\right) \tag{4}$$

$$U(x) = 2\left(B + h_1 + (h_2 - h_1)\frac{x}{L}\right) \tag{5}$$

$$S(x) = 2\left((B + h_1)x + (h_2 - h_1)\frac{x^2}{2L}\right) \tag{6}$$

- *Wärmestrom und Energiebilanz*

$$\dot{Q}(x) = A(x)q(x) = -A(x)\lambda\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7}$$

$$\dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + \mathrm{d}x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A(x)\lambda\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \alpha\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\,(T(x) - T_\infty) \tag{8}$$

- *Bestimmungsgleichung mit konvektivem Wärmeübergang*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A(x)\lambda\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right) = \alpha\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}\,(T(x) - T_\infty) \tag{9}$$

- *Bestimmungsgleichung für den isolierten Fall*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A(x)\lambda\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{10}$$

- *Vereinfachte Bestimmungsgleichung und Lösung des Randwertproblems*

$$\frac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{11}$$

$$T(x) = T_0 - (T_0 - T_\infty)\frac{\alpha}{\lambda + \alpha L}x \tag{12}$$

- *Wärmestrom an der Stelle $x = 0$*

$$\dot{Q}(x = 0) = \lambda A\frac{\alpha}{\lambda + \alpha L}(T_0 - T_\infty) \tag{13}$$

3.) Über die Oberfläche einer ebene Platte, dargestellt in Abbildung 3, mit der Länge $L = 50$ m strömt Luft mit der Geschwindigkeit $u_\infty = 1$ m/s und der Temperatur T_∞.

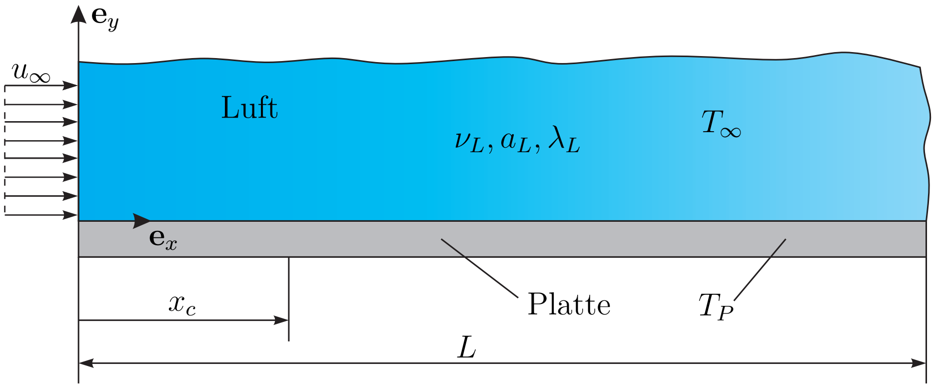

Abbildung 3: Konvektion an einer ebenen Platte

Die Luft hat die folgenden thermischen Eigenschaften:

- Kinematische Viskosität $\nu_L = 15.89\,10^{-6}$ m^2/s
- Temperaturleitfähigkeit $a_L = 22.5\,10^{-6}$ m^2/s
- Wärmeleitfähigkeit $\lambda_L = 26.3\,10^{-3}$ W/mK

Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizienten α, indem Sie folgende Punkte bearbeiten.

- Bestimmen Sie die kritische Länge x_c.
- Berechnen Sie die Nußelt-Zahl Nu (Verwenden Sie hierfür die Formeln aus dem Skript).
- Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizienten α über die Nußelt-Zahl Nu.

Lösung:

- *Kritische Länge*

$$x_c = 7.945 \text{ m} \tag{14}$$

- *Nußelt-Zahl*

$$\mathrm{Nu} = 2\mathrm{Nu}_{\mathrm{lam,x_c}} + \frac{5}{4}\left(\mathrm{Nu}_{\mathrm{tur,L}} - \mathrm{Nu}_{\mathrm{tur,x_c}}\right) = 4.4218\,10^3 \tag{15}$$

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{lam,x_c}} = \sqrt{\mathrm{Re}_{\mathrm{x_c}}}\frac{\sqrt{\mathrm{Pr}}}{\sqrt{\pi}\left(1 + 1.973\mathrm{Pr}^{0.272} + 21.29\mathrm{Pr}\right)^{1/6}} = 207.4193 \tag{16}$$

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{tur,L}} = 0.0296\mathrm{Re}_{\mathrm{L}}^{4/5}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}} = 4.1607\,10^3 \tag{17}$$

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{tur,x_c}} = 0.0296\mathrm{Re}_{\mathrm{c}}^{4/5}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}} = 955.1449 \tag{18}$$

- *Wärmeübergangskoeffizient*

$$\alpha = \frac{\mathrm{Nu}\lambda}{L} = 2.3524 \tag{19}$$